

ANAIS

IX SEMANA DA MATEMÁTICA

UTFPR TOLEDO

Formação Docente em Matemática: políticas, práticas e tendências

Página do Evento:

http://www.td.utfpr.edu.br/semat/IX_semat/

Toledo – PR

Maior - 2022



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Formação Docente em Matemática: políticas, práticas
e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022.

S471 Semana da Matemática UTFPR Toledo (9: 2022:
Toledo, PR)

Anais da IX Semana da Matemática UTFPR, Toledo
(PR), 02 a 06 de maio de 2022. / organizado pelo Curso de
Licenciatura em Matemática da UTFPR, Campus Toledo. -
Toledo, PR, 2022.

101 f.

Modo de Acesso: World Wide Web:
<http://www.td.utfpr.edu.br/semat/IX_semat/>.

ISSN 2358-4947

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Currículo -
Educação. I. SEMAT. II. UTFPR. III. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Carla Rech Ribeiro CRB 9/1685
Biblioteca UTFPR / Toledo



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Formação Docente em Matemática: políticas, práticas
e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022.

Sumário

1. INTRODUÇÃO	4
2. OBJETIVOS	5
3. PÚBLICO ALVO	5
4. PERÍODO DE REALIZAÇÃO	5
5. PERIODICIDADE DO EVENTO	5
6. REALIZAÇÃO	6
6.1. Comissão Organizadora	6
6.2. Comissão de Apoio	6
6.3. Comissão Científica	6
6.4. Comissão de Pareceristas	7
7. CRONOGRAMA	7
8. OFICINAS	7
9. TRABALHOS	9



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo **Formação Docente em Matemática: políticas, práticas** **e tendências**

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022.

1. Introdução

A Semana da Matemática da UTFPR – Toledo (SEMAT) iniciou no ano de 2013 e estará, em 2022, na sua IX edição, cujo tema discutirá “Formação Docente em Matemática: políticas, práticas e tendências”. A programação foi desenvolvida de forma presencial e remota.

O evento surgiu com o intuito de complementar a formação dos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática, que tem como preocupações preparar o acadêmico para o exercício do magistério no Ensino Fundamental e Médio, bem como formar pesquisadores, com atitudes críticas e reflexivas nas áreas de Educação Matemática, Matemática Aplicada e Matemática Pura. O evento promoveu a integração entre acadêmicos, professores de Matemática e pesquisadores permitindo aos profissionais socializar suas práticas pedagógicas, divulgar suas pesquisas e promover a formação continuada por meio de minicursos, palestras e comunicações orais.

Participam do evento os acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR – Câmpus Toledo e de outras instituições de Ensino Superior, professores do Ensino Fundamental e Médio das redes pública e privada de ensino, professores universitários e pesquisadores, não apenas da região, mas também de outros estados do Brasil.

Assim, a IX SEMAT visa aproximar alunos de graduação e de pós-graduação, professores da rede pública de ensino da região e das universidades e pesquisadores, oportunizando o diálogo e o compartilhamento de ideias, conhecimentos e experiências. Além disso, o evento oportuniza a participação de estudantes e professores do Mestrado e Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Câmpus Cascavel e do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade proponente, que neste ano realizará paralelamente ao evento, o III Workshop do Mestrado Profissional em Matemática – Câmpus Toledo (III Workshop PROFMAT), com o objetivo de divulgar trabalhos de alunos e professores do programa.

Dessa forma, o evento garante forte relação com o ensino, pesquisa e extensão na graduação e na pós-graduação. Assim, a IX SEMAT e III Workshop PROFMAT visam aproximar alunos de graduação e de pós-graduação, professores da rede pública de ensino da região e das Universidades e pesquisadores, oportunizando o diálogo e o compartilhamento de ideias, conhecimentos e experiências.

A agenda do evento contou com a palestra de abertura ministrada pelo Prof. Dr. Marcelo Souza Motta (UTFPR – Curitiba) e pela Profa. Ma Taniele Loss (UTFPR – Curitiba), que falaram sobre Tecnologias Digitais e Inovação Escolar: gamificação como proposta metodológica educacional.

No segundo dia do evento, foi realizada uma Mesa de Discussão com a presença da Profa. Dra. Flávia Dias de Souza (UTFPR – Curitiba) e do Prof. Dr. Sérgio Carrazedo Dantas (UNESPAR – Apucarana) sobre Impactos e Desafios da BNCC na Formação do Professor de Matemática, mediada pelo Prof. Dr. Cezar Ricardo de Freitas (UTPR – Toledo).

No quarto e quinto dias ocorreram as 12 oficinas com temáticas propostas pelos próprios acadêmicos.

No sexto e último dia, foi realizado o III Workshop do PROFMAT com a palestra Ensinando probabilidade com o jogo de dados de Mozart ministrada pelo Prof.



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022.

Djones Aldivo Boni (UTFPR – Toledo), e com a palestra PROFMAT e perspectivas quanto ao Doutorado ministrada pelo Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira (UFC – Fortaleza). No início do período noturno, alunos, professores e demais pesquisadores inscritos puderam divulgar suas pesquisas e trabalhos por meio de comunicações orais. No encerramento da semana acadêmica, foi realizado o VI SARAU da Matemática com apresentações artísticas e culturais de toda a comunidade acadêmica.

2. Objetivos

- Promover a integração e a capacitação de alunos e professores, bem como da comunidade acadêmica local e regional, a partir da discussão de temáticas atuais e da realização de oficinas com temas matemáticos pertinentes.
- Discutir a formação docente de Matemática à luz da BNCC com suas políticas, práticas e tendências.
- Oportunizar atividades que relacionem conteúdos estudados em sala de aula com experiências profissionais de professores e pesquisadores, visando complementar a formação dos acadêmicos.
- Refletir sobre uso das tecnologias digitais para o ensino/aprendizagem da matemática;
- Promover discussões teóricas sobre ações, concepções, pesquisas e fundamentos da Matemática, em suas diferentes áreas;
- Viabilizar o intercâmbio e a divulgação de investigações e produção científica nas áreas da matemática, assim como experiências educacionais realizadas nesse contexto.
- Promover a inclusão social para pessoas com deficiência visual por meio do Ensino da Matemática.
- Incentivar a divulgação das pesquisas realizadas por discentes e docentes nos diversos níveis e áreas da Matemática.

3. Público Alvo

Graduandos, pós-graduandos e profissionais das áreas de Educação, Educação Matemática, Matemática Pura, Matemática Aplicada e Estatística.

4. Período de Realização

O evento foi realizado nos dias 02 a 06 de maio de 2022.

5. Periodicidade do Evento

Esta foi a IX Semana da Matemática do Câmpus da UTFPR Toledo, cuja periodicidade se dá anualmente.



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022.

6. Realização

O evento foi realizado pela Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) sob a responsabilidade da comissão organizadora, nomeada pela portaria nº 13, de 12 de fevereiro de 2021.

6.1. Comissão Organizadora

Prof. Me. Ivan José Coser – Coordenador da IX SEMAT

Prof. Dr. Cezar Ricardo de Freitas – Coordenador IX SEMAT

Profa. Dra. Rosangela Aparecida Botina Assumpção – Coordenadora III

Workshop – PROFMAT

Profa. Dra. Daniela Trentin Nava

Profa. Dra. Dione Ines Christ Milani

Prof. Dr. Leandro Antunes

Prof. Dr. Márcio Paulo de Oliveira

Prof. Me. Renato Francisco Merli

6.2. Comissão de Apoio

Larissa Arianna Mekelburg da Silva

Matheus Fernando Albertoni

Nilson Liberato Neto

Felipe Rodrigues Cunha

Adriano Alfredo Schneider

Felipe Fraga de Oliveira

6.3. Comissão Científica

Prof. Dr. Márcio Paulo de Oliveira – Coordenador

Profa. Dra. Daniela Trentin Nava – Coordenadora



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022.

6.4. Comissão de Pareceristas

Profa. Ma. Aline Keryn Pin
Profa. Dra. Bárbara W. D. Novaes
Prof. Dr. Cezar Ricardo de Freitas
Profa. Dra. Daniela Trentin Nava
Profa. Dra. Dione Ines Christ Milani
Prof. Dr. Gustavo Henrique Dalposso
Profa. Ma. Jahina Fagundes de Assis Hattori
Profa. Ma. Karen Carrilho da Silva Lira
Profa. Ma. Márcia Regina Piovesan
Profa. Dra. Regiane Slongo Fagundes
Prof. Me. Renato Francisco Merli
Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan
Prof. Dr. Robson Willians Vinciguerra
Profa. Dra. Suellen Ribeiro Pardo Garcia
Profa. Dra. Vanessa Largo Andrade
Prof. Dr. Wilian Francisco de Araujo

7. Cronograma

Data	Horário	Programação	Local
02/05/2022	19:00 – 22:30	Solenidade e Palestra de Abertura	Youtube
03/05/2022	19:00 – 23:30	Mesa de Discussão	Youtube
04/05/2022	19:00 – 22:30	Oficinas 1 a 6	UTFPR- TD/Zoom
05/05/2022	19:00 – 22:30	Oficinas 7 a 12	UTFPR- TD/Zoom
06/05/2022	19:00 – 22:30	Comunicações Orais. Palestras III Workshop do PROFMAT	UTFPR- TD/Zoom/ Youtube

8. Oficinas

A IX SEMAT contou com a apresentação de doze oficinas das áreas de Educação, Educação Matemática, Matemática Pura e Matemática Aplicada, que foram ministrados por docentes da UTFPR e outras instituições.

OFICINA [01] – Introdução à Linguagem Python.



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Formação Docente em Matemática: políticas, práticas
e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022.

Responsável: Prof. Paulo Gamero (FPTI - Foz do Iguaçu)

OFICINA [02] - Oficina Básica de Robótica.

Responsáveis: Prof. Guilherme Poleto (UTFPR - Toledo)
Prof. Eloí Lucas Amendola Gomes (UTFPR - Toledo)
Prof. Augusto Cesar Becker (UTFPR - Toledo)
Prof. Lucas Freitas dos Santos (UTFPR - Toledo)

OFICINA [03] - Como elaborar um Game Pedagógico.

Responsáveis: Profa. Larissa Arianna Mekelburg (UTFPR - Toledo)
Profa. Ana Maria Costa Spohr (UTFPR - Toledo)

OFICINA [04] - Oficina sobre Técnicas de programação aplicadas à simulação de problemas da engenharia.

Responsável: Prof. Maicon Malacarne (UTFPR - Toledo)

OFICINA [05] - Geometrias não-Euclidianas

Responsável: Prof. Rodrigo Lopes (UTFPR - Pato Branco)

OFICINA [06] - Ensino da Matemática para Pessoas Cegas ou com Baixa Visão.

Responsável: Prof. Luzia Alves da Silva (UNILA - Foz do Iguaçu)

OFICINA [07] - Construindo Foguetes: uma proposta de ensino articulando Física e Matemática.

Responsável Profa. Mara Parisoto (UFPR - Palotina)

OFICINA [08] - Oficina Básica de Robótica.

Responsáveis: Prof. Guilherme Poleto (UTFPR - Toledo)
Prof. Eloí Lucas Amendola Gomes (UTFPR - Toledo)
Prof. Augusto Cesar Becker (UTFPR - Toledo)
Prof. Lucas Freitas dos Santos (UTFPR - Toledo)

OFICINA [09] - Explorando um Game Pedagógico Digital - Arquipélago da Matemática.

Responsáveis: Profa. Heloísa Cristina da Silva (UTFPR - Toledo)
Profa. Jenifer Mariana Haupenthal (SEED - PREMEN)
Profa. Tainá Florêncio Delanora (SEED - PREMEN)

OFICINA [10] - Construindo um Plano de Aula.

Responsável: Profa. Nívia Martins Ribeiro (SEED - Toledo)

OFICINA [11] - Como criar Games com o UNITY 3D.

Responsável: Prof. Eduardo Pezutti Beletato dos Santos (UTFPR - Toledo)

OFICINA [12] - Modelagem Matemática e suas atividades para o Ensino Fundamental: vamos brincar?

Responsável: Prof. Ronalti Wallace Santiago (UTFPR - Toledo)



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo **Formação Docente em Matemática: políticas, práticas** **e tendências**

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022.

III Workshop do PROFMAT TOLEDO

Palestras:

Ensinando probabilidade com o jogo de dados de Mozart
Responsável: Prof. Djones Aldivo Boni (UTFPR - Toledo)

PROFMAT e perspectivas quanto ao Doutorado
Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira (UFC - Fortaleza)

9. Trabalhos

Nesta nona edição da SEMAT, alunos, docentes e pesquisadores da UTFPR e de outras instituições de ensino submeteram resumos expandidos e trabalhos completos, que foram apresentados na modalidade de comunicação oral e/ou pôster.

Na sequência, são apresentados os 08 (oito) trabalhos completos apresentados.

O software R e o Cálculo Numérico: Resolução de uma integral utilizando a Regra dos Trapézios Repetidos

Ana Maria Costa Spohr
Universidade Tecnológica Federal do
Paraná - UTFPR
amcspohr@gmail.com

Eduarda Debortoli da Silva
Universidade Tecnológica Federal do
Paraná - UTFPR

Gustavo Henrique Dalposso
Universidade Tecnológica Federal do
Paraná - UTFPR

Resumo

O cálculo de algumas integrais pode vir a ser difícil, ou até mesmo impossível de ser realizado de forma analítica. Dessa forma, o objetivo do cálculo numérico é a utilização de métodos numéricos na resolução de problemas no geral, de forma manual ou computacional. Com isso, o presente trabalho possui a finalidade de resolver uma integral de forma analítica, e posteriormente utilizando um método numérico intitulado Regra dos Trapézios repetidos, de forma manual e computacional utilizando o software R. Assim, com os resultados obtidos, calcular os Erros Relativos e realizar uma comparação entre a forma analítica e o método escolhido. Após a realização da pesquisa, pode-se concluir que os métodos numéricos podem facilitar cálculos de diferentes expressões numéricas.

Palavras-chave: Integral. Software. Subintervalos.

1 Introdução

A palavra cálculo possui origem Latina que significa “calcular”, “computar”. Segundo Oliveira (2018) durante o século XVII a matemática teve várias descobertas, a maior delas foi realizada pelos matemáticos Isaac Newton e Gottfried Leibniz, que deram origem a alguns fundamentos do cálculo, como as derivadas e integrais. A autora ainda relata que para Newton a ideia considerável do cálculo era a taxa de variação e para Leibniz era a diferença. Nesta descoberta deu-se origem ao cálculo Integral, que dentre suas diversas possibilidades permite calcular áreas de uma região indicada.

Os cálculos de algumas integrais podem ser difíceis de serem realizados de modo analítico, pois existem diversas maneiras de resolvê-las, e assim, muitas vezes suas resoluções podem ser longas e complexas. Com isso, Brom (2013) expõe que o cálculo numérico é a resolução de problemas em que os métodos convencionais não suportam, ou, se suportam, requerem muito esforço humano, e certamente seu procedimento será facilitado por métodos computacionais.

Dessa maneira, o presente trabalho teve como objetivo comparar os resultados obtidos para a solução de uma integral por partes considerando uma metodologia analítica e uma metodologia numérica por meio da Regra dos Trapézios repetidos. A fim de facilitar a resolução da integral utilizando o modelo mencionado, este também será desenvolvido por um método computacional. Assim, foi optado por utilizar o *software* R (R Core Team, 2021) para contemplar o objetivo.

O R é um *software* de domínio público, ou seja, sem custo de aquisição. Souza, Peternelli e Mello (2006) afirmam que o software foi criado em 1966 por Ross Ihaka e Robert Gentleman.

Os autores ainda relatam que este apresenta código fonte aberto, podendo ser modificado ou implementado com novos procedimentos desenvolvidos por qualquer usuário a qualquer momento. Além disso, permite a manipulação de dados, realização de cálculos e geração de gráficos.

2 Material e Métodos

A integral escolhida para o presente trabalho ser desenvolvido é:

$$\int_0^1 x^3 \cdot \text{sen}(x) dx \quad (1)$$

A escolha desta integral presente em (1) se fez pelo fato de que esta possui muitos passos para a sua resolução de forma analítica, aumentando gradativamente a chance da ocorrência de erros no decorrer do desenvolvimento da mesma, resultando em uma solução incorreta, além de se tornar um processo demorado e moroso.

2.1 Solução Analítica

Inicialmente, a integral escolhida será desenvolvida de maneira analítica, resolvendo a integral por partes. Para que isso ocorra, deve-se escolher primeiramente quem é u e quem é dv . Para isso, pode-se utilizar uma estratégia para facilitar a escolha de u baseado no anagrama a seguir (Figura 1):

Figura 1: Anagrama (LIATE)

L	I	A	T	E
Logarítmicas	Inversas de trigonômicas	Algébricas	Trigonômicas	Exponenciais

Fonte: Sampaio - UFSCAR

A estratégia para realizar a escolha de u seria escolher dentre as duas funções que aparecem sob o sinal de integral, a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à esquerda no anagrama. Esta regra é válida somente para resolução de integral por partes e funciona em muitos casos, porém, não é sempre que dá certo.

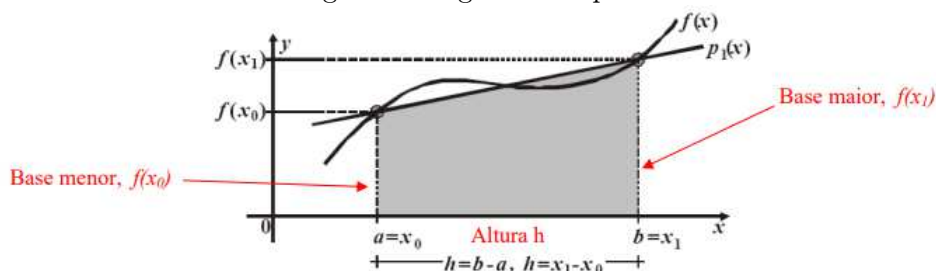
Dessa forma, analisando a integral inicial, pode-se afirmar que a melhor escolha para u será x^3 então dv será o que restou na integral, no caso $\text{sen}(x)dx$. Para definir du e v , respectivamente, basta derivarmos u e integrarmos dv .

2.2 Solução Numérica

O modelo de integração numérica escolhido para encontrar a aproximação da solução é o método numérico: Regra do Trapézios Repetidos. Primeiramente, será apresentada a Regra do Trapézio convencional.

De acordo com Pilling (2010), a ideia da regra do trapézio é aproximar a função a ser integrada por um polinômio de ordem 1, ou seja, uma reta. Nessa aproximação, a integral pode ser aproximada pela área de um trapézio, como mostra a Figura 2.

Figura 2: Regra do Trapézio



Fonte: Pilling (2010)

A fórmula utilizada para calcular essa aproximação da integral está presente em (2):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \cdot [f(x_0) + f(x_1)] \quad (2)$$

Entretanto, essa aproximação é um tanto grosseira para o valor da integral, o que pode ser verificado graficamente na Figura 2, ou seja, a diferença entre a solução exata e a aproximada é grande, é necessário que ela seja mínima. Este método aplicado uma única vez pode levar a erros. Para isto, se esta for aplicada dentro do intervalo a regra do trapézio repetidas vezes a aproximação será melhor.

Deve-se dividir o intervalo $[a, b]$ em subdivisões iguais, da seguinte forma:

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Onde h será o tamanho de cada intervalo, e n o número de intervalos. Sendo assim, a aproximação para a integral será:

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

Onde A_i = área do trapézio i , com $i = 1, 2, \dots, n$. E ainda,

$$A_i = \frac{h}{2} \cdot [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

Resumidamente, a aproximação para uma integral utilizando a Regra dos Trapézios Repetidos se encontra em (3):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \cdot [f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)] \quad (3)$$

Utilizar métodos numéricos para a resolução de integrais pode facilitar muito, reduzindo o espaço para a ocorrência de erros e, com apoio computacional, esses erros se tornam menores ainda, além de exigir um tempo menor e sem cálculos à mão.

Para calcular a integral definida utilizando a Regra dos Trapézios repetidos, utilizou-se o pacote caTools (Tusynski, 2015) do *software* R (R Core Team, 2021), pois este pacote apresenta o comando trapz com a implementação do método.

3 Resultados e Discussão

Resolvendo a integral escolhida pelo método de integral por partes:

$$\begin{aligned}u &= x^3 \\du &= 3x^2 dx \\dv &= \text{sen}(x) dx \\v &= -\text{cos}(x)\end{aligned}$$

Para calcular a integral por partes será utilizado sua fórmula matemática:

$$\int_0^1 u dv = uv - \int v du$$

Substituindo os dados já obtidos:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 \cdot \text{sen}(x) dx &= x^3 \cdot (-\text{cos}(x)) - \int_0^1 (-\text{cos}(x)) \cdot 3x^2 dx \\ \int_0^1 x^3 \cdot \text{sen}(x) dx &= -x^3 \text{cos}(x) + 3 \int_0^1 \text{cos}(x) \cdot x^2 dx\end{aligned}\quad (4)$$

Agora, será resolvida a integral $\int_0^1 \text{cos}(x) \cdot x^2 dx$ por partes, utilizando os critérios relatados anteriormente para a escolha de u e dv , serão definidos w e dz . Dessa forma, será obtido:

$$\begin{aligned}w &= x^2 \\dw &= 2x dx \\dz &= \text{cos}(x) dx \\z &= \text{sen}(x)\end{aligned}$$

Substituindo os valores obtidos:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \text{cos}(x) \cdot x^2 dx &= x^2 \cdot \text{sen}(x) - \int_0^1 \text{sen}(x) \cdot 2x dx \\ \int_0^1 \text{cos}(x) \cdot x^2 dx &= x^2 \cdot \text{sen}(x) + 2 \int_0^1 \text{sen}(x) \cdot x dx\end{aligned}\quad (5)$$

Resolvendo $\int_0^1 \text{sen}(x) \cdot x dx$ por partes, utilizando os mesmos critérios anteriores:

$$\begin{aligned}a &= x \\da &= dx \\db &= \text{sen}(x) dx \\b &= -\text{cos}(x)\end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados na fórmula da integral por partes:

$$\int_0^1 \text{sen}(x) \cdot x dx = -x \cdot \text{cos}(x) + \int_0^1 \text{cos}(x) dx$$

Segundo Leithold (1994), a integral de $\cos(x)$ é um teorema para a antiderivada da função cosseno, e assim segue imediatamente dos teoremas correspondentes para diferenciação. Dessa forma:

$$\int_0^1 \cos(x) \cdot x dx = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + c \quad (6)$$

Agora (4), (5), (6) serão unidos a fim de se obter a resposta final da integral.

$$\int_0^1 x^3 \cdot \cos(x) dx = -x^3 \cdot \cos(x) + 3x^2 \cdot \sin(x) - 6 \cdot (-x \cdot \cos(x) + \sin(x))$$

Como a integral inicial é uma integral definida, será utilizado o Teorema Fundamental do Cálculo definido por Leithold (1994):

“Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e seja g uma função tal que $g'(x) = f(x)$ para todo x em $[a, b]$. Então, $\int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a)$. Se $x = a$, a derivada pode ser uma derivada a direita, e se $x = b$, a derivada pode ser uma derivada à esquerda.”

Com isso, serão aplicados os extremos $a = 0$ e $b = 1$ na integral obtida. Realizando as operações matemáticas, segue o resultado da integral resolvida analiticamente:

$$\int_0^1 x^3 \cdot \cos(x) dx = 0,177098574$$

Agora, resolvendo a função selecionada pelo método dos trapézios repetidos:

$$\int_0^1 x^3 \cdot \sin(x) dx$$

Será resolvida considerando 10 subintervalos, como as contas são feitas a mão, o número de subintervalos não pode ser muito grande.

$$a = 0, b = 1, n = 10$$

Descobrimo o tamanho dos subintervalos:

$$h = \frac{1 - 0}{10} = 0,1$$

Substituindo as informações na fórmula apresentada, segue o resultado obtido para a integral:

$$\int_0^1 x^3 \cdot \sin(x) dx \approx 0,1796513$$

Calculando o erro relativo:

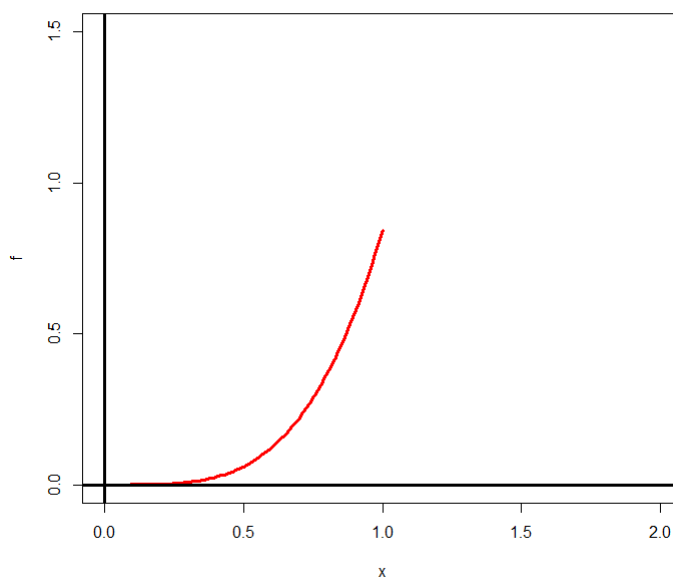
$$ER = \frac{|0,177098574 - 0,1796513|}{0,177098574} = 0,014413202$$

Percebe-se que a resposta aproximada encontrada por meio do Método dos Trapézios Repetidos é muito próxima da solução exata. Agora, este mesmo método será desenvolvido computacionalmente, pelo *software* R e utilizando o pacote apresentado. Será utilizado 10 subintervalos, o script será apresentado em seguida. Primeiramente, a função é definida:

$$f \leftarrow \text{function}(x)\{(x^3) * \sin(x)\}$$

Ao plotar o gráfico no *software*, é obtido a imagem presente na Figura 3.

Figura 3: Gráfico da função



Fonte: Dos autores (2022)

O script desenvolvido e utilizado nesta parte da pesquisa se encontra a seguir:

```
### REGRA DOS TRAPÉZIOS PARA 10 APROXIMAÇÕES ###  
  
## Carregando o pacote  
require(caTools)  
  
## Definindo o intervalo e tamanho dos subintervalos:  
x <- seq(0, 1, 0.1)  
y <- f(x)  
  
## Aplicando o método  
trapez(x, y)  
  
## Resultado obtido analisando 10 aproximações:  
## 0.1796516
```

Analisando o resultado obtido computacionalmente, verifica-se que é a mesma aproximação da encontrada nos cálculos a mão, a única diferença é a última casa decimal, devido aos arredondamentos realizados.

Para otimizar ainda mais a resposta e melhorar a aproximação, pode-se aumentar o número de subintervalos pois, como está sendo trabalhado o método computacionalmente, existe essa possibilidade. Será utilizado agora 1000 subintervalos, onde inicialmente será encontrado o tamanho destes:

$$h = \frac{1 - 0}{1000} = 0,001$$

O script desenvolvido e utilizado para 1000 subintervalos se encontra a seguir:

```
### REGRA DOS TRAPÉZIOS PARA 1000 APROXIMAÇÕES ###
```

```
## Definindo a função
```

```
f<-function(x){(x^3)*sin(x)}
```

```
## Plotando o gráfico da função
```

```
plot(f)
```

```
## Carregando o pacote
```

```
require(caTools)
```

```
## Definindo o intervalo e tamanho dos subintervalos:
```

```
x <- seq(0, 1, 0.001)
```

```
y <- f(x)
```

```
## Aplicando o método
```

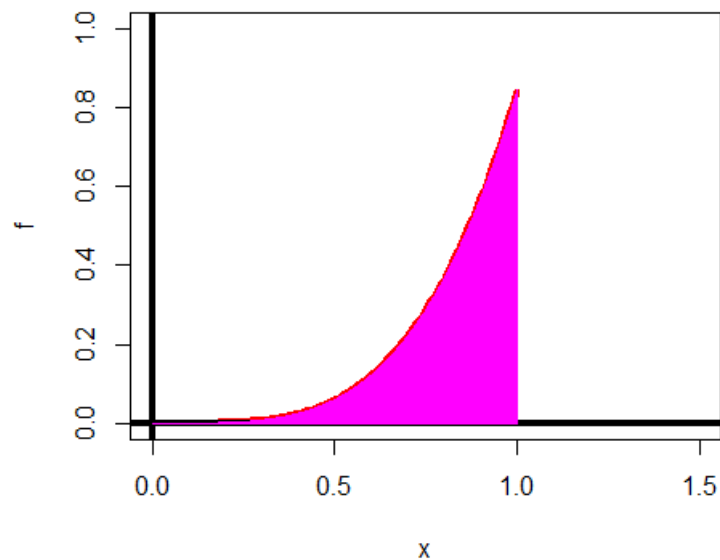
```
trapz(x, y)
```

```
## Resultado obtido analisando 1000 aproximações:
```

```
## 0.1770988
```

Após encontrar a aproximação para 1000 subintervalos foi desenhado o trapézio desta aproximação, plotado no gráfico inicial onde este se encontra na Figura 4.

Figura 4: Gráfico da função



Fonte: Dos autores (2022)

Afim de se observar as aproximações tanto para os subintervalos descritos quanto para outros diferentes, os dados obtidos foram dispostos na Tabela 1.

Tabela 1: Resultados

Número de aproximações	Resultados
1	0.4207355
10	0.1796516
100	0.1771241
1000	0.1770988

Fonte: Dos autores (2022)

Calculando o erro relativo entre a aproximação encontrada utilizando os 1000 subintervalos e a solução exata, foi obtido:

$$ER = \frac{|0,177098574 - 0,1770988|}{0,177098574} = 0,0000012$$

4 Conclusão

Ao realizar os cálculos analiticamente, notou-se uma dificuldade quanto ao desenvolvimento das contas, pois a pesquisa se baseou em uma integral cíclica. Dessa forma, a resolução das contas se tornou extensa e a possibilidade de ocorrência de erros se torna maior.

Com isso, a mesma integral foi resolvida através de um método numérico, e assim, foi possível perceber como estes podem facilitar cálculos de diferentes expressões numéricas. O cálculo numérico, segundo Arenales e Salvador (2010) tem por objetivo o estudo de métodos numéricos para a resolução de problemas em geral.

No presente trabalho, foi utilizado o Método dos Trapézios Repetidos, onde este aplicado a integral cíclica reduziu demasiadamente os cálculos quando comparado ao método analítico, chegando a uma resposta bem próxima à solução exata. Um número de subintervalos foi definido para a resolução e, percebeu-se no decorrer do trabalho, que quanto maior o número de subintervalos mais se aproximam a solução aproximada da exata.

Nesse sentido, ao comparar o erro relativo entre a aproximação e resposta exata de 10 e de 1000 subintervalos foi possível analisar que quanto maior o número de subintervalos menor o erro, e assim, mais próximo da solução exata está a resposta.

Referências

- [1] ARENALES, Selma Helena de Vasconcelos; SALVADOR, José Antônio. **Cálculo Numérico - Uma abordagem para o Ensino a distância**. São Carlos - EDUFSCAR (2010). Disponível em: <<http://hdl.handle.net/123456789/2701>> Acesso em: 09 mar 2022.
- [2] BROM, Pedro Carvalho. **Integração numérica por soma de áreas de triângulos: Regra dos triângulos repetidos**. Revista EIXO, Brasília, DF, v.2, n.1, p.53-68, jan./jun. 2013. Disponível em: <<http://revistaeixo.ifb.edu.br/index.php/RevistaEixo/article/view/58/50>> Acesso em: 08 mar 2022.



IX Semana da Matemática da UTFPR - Toledo
Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e
tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

- [3] LEITHOLD, Louis. Cálculo com geometria analítica. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra. V.1, 3 edição, São Paulo: Harbra, 1994.
- [4] OLIVEIRA, Milena de Jesus. O SURGIMENTO DO CÁLCULO DE INTEGRAIS E SUAS APLICAÇÕES. In: Anais Colóquio Estadual de Pesquisa Multidisciplinar (ISSN-2527-2500) Congresso Nacional de Pesquisa Multidisciplinar. 2018.
- [5] PILLING, Sergio. **Cálculo Numérico: Integração Numérica**. Univap, 2018. Disponível em: <https://www1.univap.br/spilling/CN/CNCapt6.pdf>. Acesso em: 12 mar 2022.
- [6] R Core Team (2021). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- [7] SAMAPAI, João Carlos Vieira. **Cálculo 1 - Apostila de Cálculo**. Universidade Federal de São Carlos - UFSCAR. Disponível em: <https://www.docsity.com/pt/calculo-1-professor-joao-carlos-vieira-sampaio/5671950/> Acesso em: 12 mar 2022.
- [8] SOUZA, Emanuel Fernando Maia; PETERNELLI, Luiz Alexandre; MELLO, Márcio Pupin. **Software livre R: aplicação estatística**. 2006.
- [9] Tuszynski, J. (2015). Package 'caTools'. Retrieved from <https://cran.r-project.org/>. Acesso em: 12 mar 2022.



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM O SOFTWARE SCRATCH: CLASSIFICAÇÃO DE TRIÂNGULOS

Carlos Eduardo Dominicali Rigoti
PROFMAT – UTFPR – Campos Toledo
carlos.rigoti@escola.pr.gov.br

Daniela Trentin Nava
UTFPR – Campus Toledo
dnava@professores.utfpr.edu.br

Regiane Slongo Fagundes
UTFPR – Campus Toledo
regianefagundes@utfpr.edu.br

Resumo

Com o avanço da tecnologia e da ciência, os métodos tradicionais¹ de ensino deixaram de ser tão eficazes no processo de ensino aprendizagem. Vivemos um século de constantes transformações, em que os alicerces do conhecimento devem ser apoiados na aprendizagem criativa e no aluno protagonista. Buscar novas estratégias para abordar objetos do conhecimento matemático de forma lúdica e ativa se faz necessário. Portanto, o objetivo deste trabalho foi elaborar uma sequência didática² para o estudo de classificação de triângulos, utilizando o modelo de rotações por estações e o *software Scratch*. A sequência didática foi elaborada com base nos objetos do conhecimento da unidade temática de Geometrias, do componente curricular de matemática e suas tecnologias, e prevê aplicação a alunos do 9º Ano. Cinco etapas de trabalho foram organizadas, com sugestões de atividades e rotinas de programação no *Scratch*. Foram selecionadas questões da prova do SAEB como sugestão de fixação do conteúdo abordado.

Palavras-chave: Aprendizagem criativa. Rotação por estações. Pensamento computacional.

¹ O método tradicional de ensino chegou ao Brasil no final do século XIX, este considera o professor como figura central e único detentor do conhecimento, que é repassado aos alunos, normalmente, por meio de aula expositiva. Ao estudante, reduzido a expectador da aula, cabe apenas memorizar e reproduzir os saberes.

² Uma Sequência Didática se refere a uma sequência elaborada pelo professor que proporciona uma escolha ou organização de atividades que explorem o domínio do conhecimento dos alunos em sala de aula.



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

1 Introdução

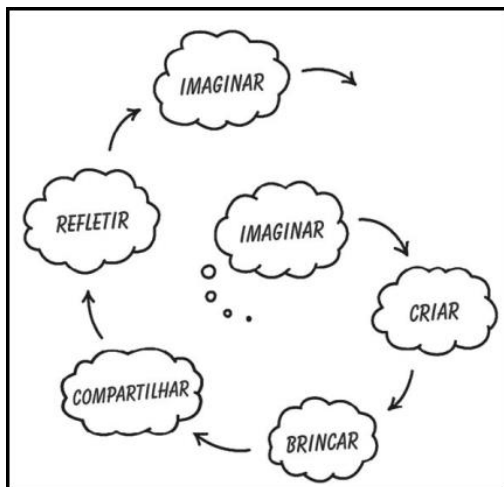
No momento atual em que a tecnologia e os avanços científicos crescem a taxas nunca antes vistas, a palavra de ordem é mudança, tudo muda a todo instante, todo ano novas tecnologias surgem e outras dezenas se tornam obsoletas e deixam de existir, impactando toda sociedade. Problemas antigos são resolvidos, enquanto novos, mais complexos e dinâmicos, passam a chamar atenção. Neste contexto de mudança constante a criatividade passa a ser uma competência valiosa.

Esses constantes avanços da ciência e tecnologia causam mudanças em todos os campos sociais, e na educação não é diferente. Os métodos tradicionais que antigamente eram suficientes para transmitir o ensino aos estudantes, hoje não funcionam com tanta eficácia. Um motivo muito razoável para isso, é que os estudantes não são mais os mesmos. É impossível manter uma metodologia estática em uma realidade onde o incentivo é voltado ao dinamismo.

Por essas razões Resnick (2017) coordenador do grupo de pesquisas *Lifelong Kindergarten* do MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) Media Lab, defende que vivemos no século da criatividade, e nada mais natural que os educadores e a sociedade em geral comecem a se perguntar: Se a criatividade é tão importante, como estimular que as pessoas aprendam a ser criativas?

Para Valente (2005) a construção do conhecimento se dá através de um espiral da aprendizagem criativa (AC) mostrada na Figura 1, que se desenvolve da seguinte forma: em primeiro lugar imagina-se algo, em seguida cria-se algo a partir do que foi imaginado, depois brinca com o que foi criado e compartilha, por fim, reflete sobre o que foi criado conversando com outras pessoas. É uma espiral contínua, o processo não para por aí.

Figura 1: Imagem da espiral da aprendizagem criativa



Fonte: Imagem do Livro (*Lifelong kindergarten: cultivating creativity through projects, passion, peers, and play*, 2011).

Ao refletir sobre tudo que foi feito, o aprendizado ocorrido durante o fazer, e sobre as contribuições feitas por outras pessoas, estimula o surgimento de novas ideias, que por sua vez, permite imaginar novas possibilidades e assim o ciclo recomeça. Como a criatividade é exercitada durante todo o processo, ela está em constante expansão e por isso temos uma espiral e não um círculo.

A AC baseada principalmente no construcionismo de Seymour Papert em sua obra *The Children's Machine: Rethinking School In The Age Of The Computer* (A Máquina das Crianças: Repensando a Escola na Era do Computador, 2007), também pesquisador do MIT, enfatiza o uso dos computadores como uma importante ferramenta para a aprendizagem.

O computador, de um modo simples, porém muito significativo, amplia a gama de oportunidades para o engajamento em atividades com conteúdo científico e matemático (Papert, 2008, p. 140).

Um dos trabalhos mais conhecidos do *Lifelong Kindergarten* é a linguagem de programação *Scratch*, um *software* que funciona não só para ensinar a programar, mas também como plataforma de expressão criativa, foi pensada como sendo um ambiente de jardim de infância virtual feito para ensinar a programar.

Na medida em que os alunos trabalham com os projetos *Scratch*, eles aprendem os conceitos de *design*. Na verdade, o aluno começa por ter uma ideia, cria um projeto, experimenta, corrige os erros, recebe um *feedback* e em



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo **Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e** **tendências**

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

seguida revê seu projeto. É uma espiral contínua: ter uma ideia, criar um projeto, o que conseqüentemente leva a novas ideias, brincam, compartilham, e assim continua a espiral do pensamento criativo.

Papert (1984) apontou a necessidade de compreender que a tecnologia e o uso de materiais diversos podem promover a educação, porém para que a aprendizagem criativa ocorra, o ensino não pode ser meramente a aplicação de experimentos vazios, e sim, construção de produtos significativos, originais e relevantes aos estudantes. Resnick (2017) enfatizou o papel da espiral de aprendizagem criativa como o princípio norteador de qualquer ação relacionada a esse método.

Um dos métodos que podem ser utilizados para trabalhar a AC é o uso da sequência didática (SD), que é um grupo de atividades interligadas para ensinar determinado conteúdo passo a passo. Elas são organizadas de acordo com os objetivos que o professor espera alcançar para a aprendizagem dos estudantes e envolvem atividades de aprendizagem e avaliação.

Ao organizar a sequência didática, o professor poderá incluir atividades diversas como leitura, pesquisa individual ou coletiva, aula dialogada, produções textuais, aulas práticas, etc (BRASIL, 2012, p. 21).

Na elaboração de uma SD, devem ser levados em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes. Nesse momento a sondagem é de essencial importância para que o professor consiga elaborar uma aula dinâmica, com interação entre todos os envolvidos. As SD sempre fazem parte de um plano de ensino mais amplo, onde você pode colocar suas expectativas em relação aos estudantes ao longo do ano, sendo assim, a seleção do tema de cada proposta não pode ser aleatória.

Um dos modelos de SD é o método rotação por estação, que prevê a criação de um circuito dentro da sala de aula, com atividades em cada uma das estações, onde os estudantes alternam-se entre as estações com um tempo determinado pelo professor. Cada uma dessas estações deve propor uma atividade diferente sobre o tema central da aula,



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

mas as estações devem ser independentes uma das outras, uma vez que os estudantes circulam entre as estações completando cada uma das atividades. Durante toda a aula o professor assume o papel de mediador, circulando entre as estações esclarecendo dúvidas e atendendo aos estudantes que precisam de mais atenção.

O trabalho com as estações também favorece o uso de uma variedade de recursos didáticos como videoaulas, leituras, trabalhos colaborativos, uso de games entre outros, auxiliam na personalização do ensino.

A rotação por estação possibilita o engajamento, flexibilidade e oportunidades de aprendizado, combinado com a inclusão de ferramentas tecnológicas. Nessa perspectiva o foco do processo de aprendizagem coloca o aluno no centro permitindo que os estudantes sejam protagonistas do processo de ensino aprendizagem.

Embasado no que foi exposto, o objetivo do trabalho é propor uma SD para o estudo de classificação de triângulos, utilizando o modelo de rotações por estações e o *software Scratch*.

2 Metodologia

A SD (Classificação dos Triângulos) foi elaborada com base nos objetos do conhecimento da unidade temática de Geometria do componente curricular de matemática e suas tecnologias e prevê aplicação a alunos do 9º Ano.

Foi escolhido o objeto do conhecimento Classificação de Triângulos para retomar o conteúdo presente no descritor D3 (Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos) da Prova Brasil SAEB (2009). A escolha desse descritor se deve ao fato de que o índice de acertos em algumas escolas do Paraná, ter ficado abaixo da média nacional. Assim, será possível revisar algumas propriedades dos triângulos, esclarecer as possíveis dúvidas dos alunos e despertar a aprendizagem criativa com o *Software Scratch*.

2.1 Conhecendo um pouco o *Scratch*

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

O *Scratch* é um *software* livre que se constitui como uma linguagem de programação visual e permite ao usuário construir interativamente suas próprias histórias, animações, jogos, simuladores, ambientes visuais de aprendizagem, músicas e arte. No mesmo processo, eles aprendem a pensar criativamente, raciocinar sistematicamente e trabalharem grupo, habilidades essenciais para todos na sociedade de hoje (LIFELONG KINDERGARTEN GROUP, 2011).

Para entrar o *Scratch*, o estudante acessa a página do *software* pelo endereço eletrônico www.scratch.mit.edu e clica no botão “inscreva-se” para criar uma conta totalmente gratuita.

O *Scratch* pode ser usado no modo *online*, onde o estudante além de poder criar e compartilhar suas programações tem a possibilidade de pesquisar projetos que já foram feitos por outras pessoas. A plataforma também disponibiliza o download do *software* para ser usado no modo *offline*, essa função pode ser encontrada no rodapé da página do *Scratch* e escolher o modelo com base no sistema operacional do computador. Esta segunda opção deve ser adotada onde há instabilidade da internet.

A linguagem de programação do *Scratch* é baseada em blocos de comando que são interligados como um quebra-cabeça, onde cada peça deste “quebra-cabeça” funciona como um comando e, quando se juntam todos esses comandos, forma-se uma programação como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Exemplo de programação feita no *Scratch*



Fonte: Próprio Autor, 2022.

A página de criação do *Scratch* pode ser dividida em três áreas diferentes (Figura 3):

Figura 3 – Imagem das áreas de programação e dos principais comandos do *Scratch*



Fonte: Próprio Autor, 2022.

- **Área de Blocos de Comando:** é a área onde você escolhe os blocos que farão parte da sua programação conforme a necessidade, criar movimentos e falas aos atores, tocar cenários, adicionar sons, entre outras funções.
- **Área de Programação:** espaço destinado a juntar os blocos em uma sequencialógica, de acordo com a necessidade e criatividade.
- **Área de apresentação:** onde é possível visualizar os atores e cenários que foram escolhidos, e também fazer testes com a programação feita.

A SD elaborada foi dividida em cinco etapas, sendo as duas primeiras previstas para ocorrer em sala de aula e as três últimas no laboratório de informática.

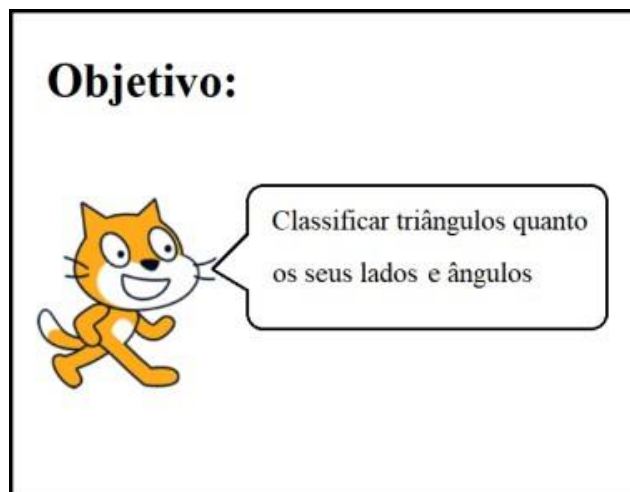
3 Resultados e Discussão

A seguir é apresentada a SD e o passo a passo para aplicação. Foi planejado para executar em cinco etapas e o objetivo foi classificar os triângulos pelas medidas de seus lados ou de seus ângulos internos e despertar a aprendizagem criativa.

Os recursos necessários são: Atividades impressas em folhas, régua, transferidor, tesoura, cola, computadores com acesso a internet (Laboratório de

ETAPA 1

Figura 4 – Objetivo da trilha de aprendizagem



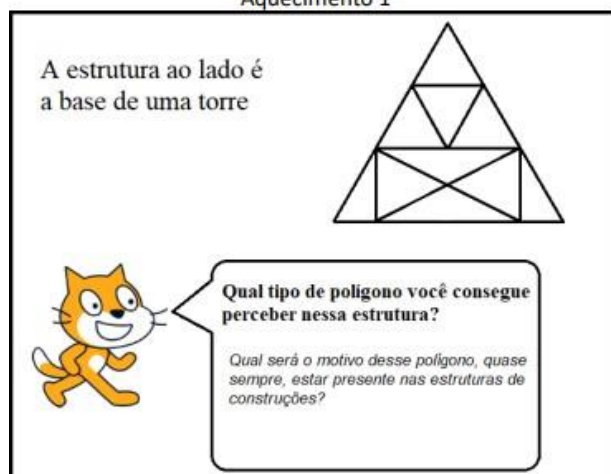
Fonte: Próprio Autor, 2022.

Tempo sugerido: 5 minutos

Orientação: Projete e leia o objetivo para a turma, perguntando se conhece tipos diferentes de triângulos. (Figura 4)

Propósito: Introduzir o objetivo da aula.

Figura 5 – Estrutura formada por triângulos
Aquecimento 1



Fonte: Próprio Autor, 2022.

Tempo sugerido: 10 minutos.

Orientação: Comece a aula perguntando aos estudantes sobre os polígonos que compõem a estrutura (Figura 5). A intenção é que observem o triângulo. Pergunte

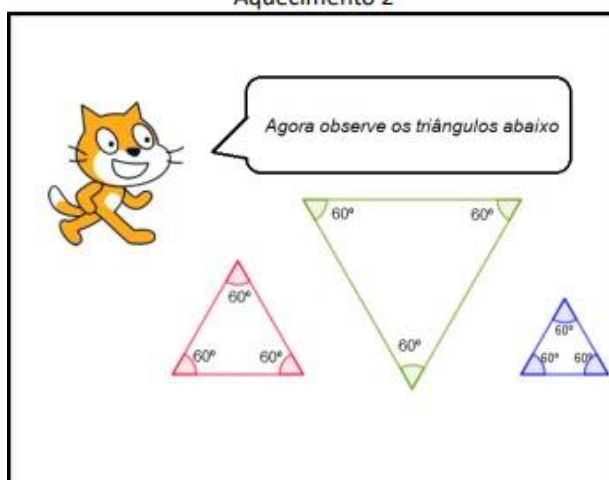
Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

por que este é o polígono utilizado na construção desse tipo de estruturas. Ouça as opiniões antes de passar para o próximo slide.

Propósito: Reconhecer que o uso de triângulos não se baseia na escolha aleatória. O polígono deve ter algo que o diferencie de outros polígonos.

Materiais complementares para impressão: [Aquecimento 1](#), [Resolução do Aquecimento 1](#)

Figura 6 – Triângulos equiláteros
Aquecimento 2



(Fonte: Próprio Autor, 2022)

Tempo sugerido: 10 minutos. Orientações: Mostrar aos estudantes que o ângulo do triângulo não muda quando você aumenta seus lados (Figura 6). Os ângulos iguais tornam o triângulo mais rígido. Explique que se alterarmos o valor de um ângulo, a figura não será mais um polígono, pois seus lados serão separados.

Pergunte para a turma:

- Os triângulos da imagem são iguais?
- Como vamos classificá-los?

Propósito: Fazer com que os estudantes percebam que outros polígonos podem mudar seus ângulos sem alterar o comprimento do lado, o que não acontece com os triângulos. "O triângulo é especial".

Figura 7 – Estrutura colorida com triângulos
Atividade 1



Fonte: Próprio Autor, 2022.

Tempo sugerido: 20 minutos.

Orientações: Entregue a primeira folha para cada aluno com a imagem do slide (Figura 7). A figura mostra uma estrutura formada apenas por triângulos. Peça-lhes para recortar e dividir os triângulos em três grupos de acordo com o tamanho dos lados de cada triângulo.

Propósito: Peça aos estudantes que pensem em como reconhecerão os triângulos e depois os separe. Eles devem classificá-los de uma maneira diferente do que dizer as dimensões dos lados. Instruídos desta forma a separarem os triângulos em lados iguais ou diferentes.

Considerações: Esta atividade fornece vários erros na separação de triângulos. Por isso, é interessante que todos os estudantes apresentem seus resultados. Desnecessário dizer que a separação é errada, mas estudantes e professores tentarão chegar a um consenso sobre os resultados observados. No final da atividade, explique que triângulos com todos os lados iguais são equiláteros, triângulos com dois lados iguais são isósceles e triângulos com todos os lados diferentes são escalenos, os quais deverão ser divididos nos três grupos acima mencionados e depois colá-los no caderno.

Materiais complementares para impressão: [Atividade 1](#), [Resolução da Atividade 1](#)

ETAPA 2

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

Figura 8 – Estrutura colorida com triângulos
Atividade 2



Fonte: Próprio Autor, 2022.

Tempo sugerido: 30 minutos.

Orientações: Use transferidor, tesoura e uma segunda folha com a mesma imagem da estrutura. Explique que agora eles dividirão os triângulos em três grupos com base em seus ângulos internos. Suponha que eles possam escrever o valor do ângulo medido no triângulo. **Propósito:** Estimule a capacidade de raciocínio dos estudantes e deixe-os tentar encontrar a lógica de divisão dos triângulos de acordo com os seus valores angulares.

Considerações: No final desta atividade, explique que assim como na classificação feita com as medidas dos lados, também temos uma nomenclatura especial na divisão quanto aos ângulos. Triângulos com todos os ângulos internos menores que 90° são acutângulos (ângulos agudos), triângulos com ângulos internos maiores que 90° são obtusângulos (ângulos obtusos) e triângulos com ângulo interno igual a 90° são ditos retângulos (ângulos retos) e peça-lhes que colem no caderno dividindo-os nos três grupos mencionados.

Materiais complementares para impressão: [Atividade 2](#), [Resolução da Atividade 2](#)

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

Figura 9 – Classificação dos triângulos quanto ao número de lados e ângulos
Sistematização do Conceito



Fonte: Próprio Autor, 2022.

Tempo sugerido: 15 minutos.

Orientações: Mostrar um resumo aos alunos dos tipos de triângulos, seus nomes e suas características (Figura 9). Pergunte aos alunos novamente sobre a classificação dos triângulos. Use a nomenclatura usada na classificação do triângulo para completar a sistematização do conceito.

Propósito: Verificar se os alunos compreenderam as características dos diferentes tipos de triângulos e a nomenclatura utilizada.

Atividade Principal – “Gamificação com o Software Scratch”

Essa atividade será dividida em três aulas, sendo a primeira para criar a conta e apresentar a plataforma do *Software Scratch* aos estudantes, bem como suas principais funcionalidades, e deixá-los livres para explorarem os recursos. A segunda aula será destinada para a programação com foco no conteúdo de classificação dos triângulos usando os cartões de programação criados pelo professor, a aula será finalizada com a rotação dos estudantes pelos computadores então considerados como estações de aprendizagem. A terceira aula será destinada a criações autorais dos estudantes e posteriormente será realizada a rotação pelas estações de aprendizagem.

ETAPA 3

Tempo sugerido: 50 minutos



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

Orientações: Para programarmos com o *Scratch* os estudantes deverão fazer a inscrição seguindo os passos que já foram mencionados no tópico “Primeiro acesso ao *Scratch*”. Depois de inscritos os estudantes serão apresentados ao software onde ficarão livres para poderem pesquisar programações prontas, jogos, animações, assistirem a tutorias e demonstrações de algumas possibilidades de criações.

Propósito: fazer a inscrição dos alunos e ambientá-los com o *software*.

ETAPA 4

1º Passo: Acesse sua conta do *Scratch* entrando no endereço eletrônico: <https://scratch.mit.edu>. Clique em Criar, na parte superior esquerda da página, assim você estará pronto para criar um novo projeto.

2º Passo: Escolha um ator.

3º Passo: Construir um triângulo no cenário e editá-lo (Figura 10).

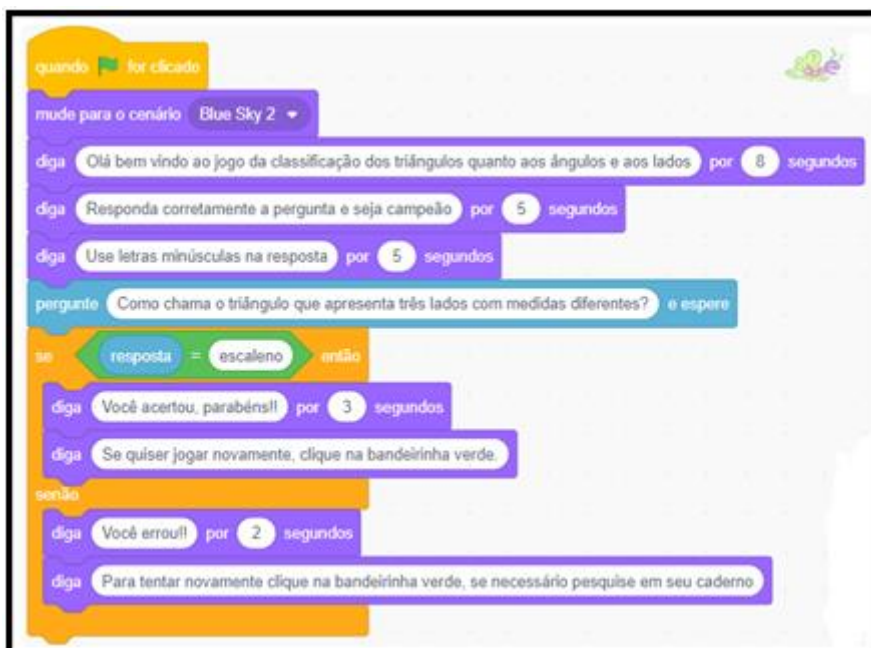
Figura 10 – Editando Cenário do *Scratch*



Fonte: Próprio Autor, 2022.

4º Passo: Com o ator principal selecionado, programá-lo utilizando a aba códigos (Figura 11).

Figura 11 – Códigos da programação (Cartão de Programação)



Fonte: Próprio Autor, 2022.

Tempo sugerido: 50 minutos

Orientações: Conduzir os estudantes durante a programação no que diz respeito ao conteúdo de classificação dos triângulos, no entanto, deixando-os livres para que usem a criatividade na escolha dos mais variados tipos de atores e cenários, dando movimento e sons diversos as apresentações. Será distribuído aos estudantes um cartão com um exemplo de programação para que eles possam se basear na apresentação, também serão disponibilizados os links das programações prontas.

Propósito: Fazer com que os estudantes utilizem os conteúdos assimilados nas duas primeiras etapas sobre a classificação dos triângulos para programarem com o *software Scratch* despertando a aprendizagem criativa, e com a rotação por estação cada aluno aprende com a programação realizada pelo outro grupo, todos aprendem e ensinam ao mesmo tempo.

Considerações: conforme os estudantes vão finalizando suas apresentações, será feita uma rotação entre os computadores, considerados como estações de aprendizagem.

Materiais complementares para projeção e impressão: [Principais Comandos e Funcionalidades do Scratch](#) [Cartões de exemplos de programações](#)



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

Para auxiliar o trabalho, o Quadro 1 apresenta links das programações prontas para os alunos visualizarem.

Quadro 1 Programações prontas disponíveis para consulta no *software Scratch*

Exemplos de Programação	
Triângulo	Link
Escaleno	https://scratch.mit.edu/projects/555618657/
Isósceles	https://scratch.mit.edu/projects/555656155/
Equilátero	https://scratch.mit.edu/projects/555659020/
Obtusângulo	https://scratch.mit.edu/projects/555661744/
Acutângulo	https://scratch.mit.edu/projects/555664513/
Retângulo	https://scratch.mit.edu/projects/555662780/

ETAPA 5

Tempo sugerido: 50 minutos

Orientações: Deixar os alunos livres para criarem animações, jogos ou *quizz* de conteúdos matemáticos ou outros conteúdos de seus interesses. Durante toda a aula, o professor estará supervisionando as criações e ajudando sempre que solicitado. Uma forma de despertar a aprendizagem criativa é deixar os alunos trabalharem com assuntos do próprio interesse, livres para poderem colaborar com os demais e manter o espírito de pensar brincando. Na opinião de Resnick (2017) É necessário oferecer oportunidades para os jovens criarem projetos, experimentarem e explorarem novas ideias.

Propósito: Despertar a aprendizagem criativa e verificar o aprendizado dos alunos no conteúdo de classificação de triângulos

Considerações: Como forma de avaliação sobre o conteúdo e a fim de prepará-los para a Prova Brasil, foi aplicado um simulado contendo questões de provas SAEB de anos anteriores.

Materiais complementares para projeção e impressão: [Questões do simulado](#)

4 Considerações Finais

A SD, que contemplou o uso do *Scratch* para retomada do objeto do conhecimento classificação de triângulos, foi desenvolvida com o intuito de organizar atividades que auxiliassem na construção do conhecimento de forma



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

lúdica e participativa. Por meio de sua aplicação é possível compreender as formas de raciocínio dos alunos como elaboraram o conhecimento. Não é possível impor um jeito de pensar, mas oferecer caminhos mais rápidos e fáceis de serem compreendidos.

O professor deve possibilitar a chance de experimentar diferentes ações para que seja desenvolvido o senso crítico proporcionando o direito de escolher e a estratégia que possibilite compreender o que se está fazendo.

Um trabalho dessa natureza é capaz de possibilitar uma aprendizagem criativa e relacionada a outros conhecimentos e ainda desenvolver competências e habilidades formadoras. Estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas e argumentar. Desta forma, o aluno desenvolve seu raciocínio participando de atividades, agindo e refletindo sobre a realidade e fazendo uso das informações de que dispõe.

Como trabalhos futuros, a SD será aplicada em turmas de 9º ano para avaliar e corrigir possíveis falhas.

5 Referências

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto nacional pela alfabetização na idade certa:** alfabetização em foco. Projetos didáticos e sequências didáticas em diálogo com os diferentes componentes curriculares. Brasília, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

DIAS VAZ, C. L.; CAMPOS ROCHA, H. S. **Matemática e Arte em trilhas, olhares e diálogos.** Editaedi: Belém, 2018.

LIFELONG KINDERGARTEN GROUP. **Reference Guide Scratch.** MIT Media Lab, 2011. Disponível em: <https://scratch.mit.edu/about>. Acesso: em 04 fev. 2022.

Papert, S. **A máquina das crianças:** Repensando a escola na era da informática. PortoAlegre, RS: Editora Artmed, 2007. (Edição original EUA 1993).

Papert, S. **Logo:** computadores e educação. São Paulo: Editora Brasiliense, 1984.

RESNICK, M. **Lifelong Kindergarten:** Cultivating Creativity through Projects, Passion, Peers, and Play. 1st ed. MIT Press: Cambridge, MA, 2017



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

SAEB. Sistema de Avaliação da Educação Básica. **Questões da Prova Brasil.** Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br>. Acesso: em 10 jan. 2022.

VALENTE, J. A. **A espiral da espiral de aprendizagem:** o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação, 2005. Instituto de Artes, Campinas, SP, 2005. Disponível em: <https://1library.org/document/y9dm7gjq-espiralaprendizagem-processo-compreensao-tecnologias-informacao-comunicacao-educacao.html>. Acesso em: 10 de jan. 2022.

Uma análise a respeito de investimentos em Renda Fixa

Eduarda Debortoli da Silva
Universidade Tecnológica Federal do
Paraná - UTFPR
eduardadebortoli22@gmail.com

Daniela Trentin Nava
Universidade Tecnológica Federal do
Paraná - UTFPR

Resumo

Nos últimos anos o mercado financeiro vem se tornando cada vez mais influente na economia mundial. Devido a facilidade de acesso, os investimentos em títulos públicos ou privados estão em constante expansão. Porém, a maioria dos brasileiros ainda investem apenas na caderneta de poupança, podendo não ser a melhor opção. Dessa forma, o objetivo do presente trabalho é realizar uma análise de alguns investimentos em renda fixa e apresentar uma simulação destes, efetivando uma comparação entre suas características. Para isso, foi utilizado o site oficial do Tesouro Direto e o título escolhido para uma aplicação simulada foi “Tesouro Selic 2025”. Como resultados, foram obtidos os dados em uma tabela e representados em um gráfico, e assim foi realizado uma análise sobre estes. Com isso, pode-se concluir que alguns investimentos na renda fixa acabam sim sendo mais rentáveis que outros.

Palavras-chave: Investimento. Renda Fixa. Poupança.

1 Introdução

A expansão econômica, política e cultural a nível mundial se amplifica a cada dia, processo mais conhecido como globalização. Com isso, o mercado financeiro adquire uma função significativa na economia mundial, sendo um dos principais meios de intercâmbio comercial entre diversos países no mundo.

Com a crescente facilidade de acesso à informação, Kreutz et. al. (2018) relatam que nos últimos anos tem-se observado o crescimento dos investimentos em títulos públicos ou privados. Os autores ainda comentam que investimentos nestes títulos eram pouco usuais em décadas anteriores, brasileiros tinham receio em fazer aplicações em títulos, preferiam investir em imóveis e caderneta de poupança.

No mercado financeiro os produtos recebem diferentes classificações, dentre elas renda fixa e variável. Segundo Rico (2021), a renda fixa é uma modalidade de investimento onde a rentabilidade é previsível, sendo o ideal como um primeiro tipo de investimento para um investidor iniciante. Ela pode ser emitida por instituições financeiras privadas e públicas, como os bancos, empresas ou pelo governo, seus investimentos mais populares são: Poupança, CDB, Tesouro Direto, LCI e LCA, dentre outros.

Já a renda variável, Rico (2020) afirma que pode ser entendida como ativos financeiros que possuem retornos não previsíveis, ela possui essa volatilidade, pois os investimentos variam conforme as expectativas quanto a fatores como empresa ou ativo principal (*commodity*, imóvel ou moeda), cenário econômico, político local e externo, bem como o setor de atuação.

De acordo com Coelho et. al. (2019), a busca por ganhar dinheiro para sobreviver é constante, seja ela com trabalho remunerado, ou mesmo investindo nas economias. Quando se fala em investimento, sempre será buscado o investimento com o melhor retorno e o menor risco de perdas. Hoje o investimento com menor risco e maior popularidade no Brasil é a caderneta de

poupança, porém ela possui pouca rentabilidade. Já o investimento em outros índices na renda fixa, costumam ser mais rentáveis e com pouquíssimo risco financeiro como a própria poupança.

Muitas vezes os objetivos projetados para o investimento podem não ser alcançados, isso se retrata quando se fala de "riscos". Segundo Cleland e Ireland (2002), risco é a probabilidade de que algum evento impacte negativamente as metas do projeto, neste caso, o projeto seria um futuro investimento. Para que isso não ocorra, ou que possua uma baixa probabilidade de ocorrência, é necessário conhecer um pouco mais sobre os tipos de investimentos.

Dessa maneira, o objetivo do presente trabalho é realizar análise a respeito de alguns investimentos na renda fixa, e assim executar uma comparação entre estes, com o intuito de ser constatado suas diferenças em lucratividade.

2 Material

Na renda fixa existem alguns tipos principais de investimentos, onde estes serão apresentados no presente capítulo, e posteriormente, utilizados para o desenvolvimento da pesquisa. Segundo o site oficial da XP, o CDB - Certificado de Depósito Bancário é um título de renda fixa emitido por bancos para captar dinheiro e financiar suas atividades. Em troca deste empréstimo de recursos ao banco, o mesmo irá devolver ao investidor a quantia aplicada mais o juro acordado no momento do investimento.

Existem três tipos de rendimento no CDB: Pré-Fixado, Pós-Fixado e Híbrido. No Pré-Fixado a taxa de juros é definida no momento da aplicação, sendo possível determinar quanto renderá o investimento antes do vencimento do prazo do título. No Pós-Fixado a rentabilidade é determinada através de um percentual sobre um índice, como o Certificado de Depósito Interbancário (CDI), que é o índice de referência neste tipo de rendimento. Já o híbrido pode ser definido como a união dos dois anteriores, a parte da rentabilidade é estabelecida no momento da aplicação e a outra parte é atrelada a um índice econômico.

O LCA (Letra de Crédito do Agronegócio) e LCI (Letra de Crédito Imobiliário) possuem algumas características semelhantes. Segundo Cavalcante (2009), a LCI é um título de renda fixa emitido por determinadas instituições autorizadas pelo Banco Central Brasileiro a realizar operações de crédito imobiliário, pois este título deve ser lastreado por créditos imobiliários com garantia de alienação fiduciária ou hipotecária. De acordo com Jevinski (2016), a LCA é um título criado pelo governo com o objetivo de ampliar os recursos disponíveis ao financiamento agropecuário. A rentabilidade da LCA geralmente é baseada em um percentual do CDI, que oscila sempre muito próxima a Taxa Selic (Taxa Básica de Juros). Segundo a XP, ambas podem ter a remuneração em % do CDI, CDI + spread, Índices de preços (ex: IGP-M, IPCA) ou Taxa Pré-Fixada.

Segundo o Guia do investidor criado pela Secretaria do Tesouro Nacional, um outro investimento da renda fixa é o Tesouro Direto, este é um programa criado pelo Tesouro Nacional, que permite que qualquer pessoa com um CPF possa investir em Títulos públicos, pela internet. Assim como os outros investimentos, este possui investimentos em títulos Pré-Fixados e Pós-Fixados.

A caderneta de poupança é um dos investimentos mais populares e tradicionais no Brasil, isso ocorre porque pode-se considerar um investimento seguro, sem riscos. Contudo este possui baixa rentabilidade, sendo menor do que os outros produtos de risco semelhantes ou inferiores. Segundo o Banco Central do Brasil, de acordo com a legislação atual (art. 12 da Lei nº 8.177), a remuneração dos depósitos de poupança é composta de duas parcelas: a remuneração básica,

dada pela Taxa Referencial - TR, e a remuneração adicional, correspondente a 0,5% ao mês, enquanto a meta da taxa Selic ao ano for superior a 8,5%; e 70% da meta da taxa Selic anual, vigente na data de início do período de rendimento, mensalizada enquanto a meta da taxa Selic ao ano for igual ou inferior a 8,5%.

Segundo o Raio X do Investidor, analisando o período de 2017 à 2019, foi realizada uma pesquisa com uma quantidade de pessoas sobre os produtos financeiros mais usados pelos investidores, os dados estão presentes na Figura 1 em forma de gráficos:

Figura 1: Produtos Financeiros mais usados pelos investidores



Fonte: Raio X do Investidor (2020)

Analisando o gráfico presente na imagem, pode-se observar que a caderneta de poupança é a mais utilizada pelos investidores, como dito anteriormente. Porém, a cada ano ela sofre uma queda, ainda pequena, de investimentos, como a diferença de investimentos de 2017 à 2019 foi de 4,8%. Já o Fundo de Investimento cresceu 2% neste mesmo período.

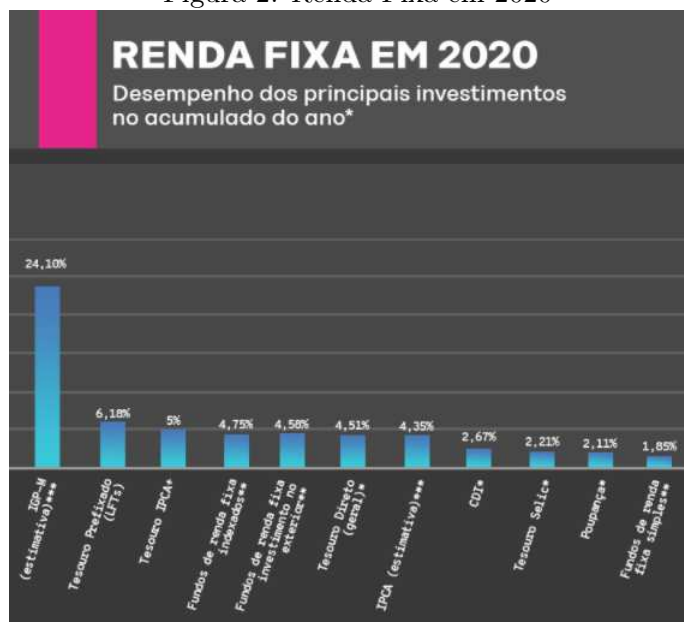
Conforme a Anbima (2021), o ano de 2020 foi marcado pela pandemia de coronavírus, que mudou o mundo, com impacto sobre os negócios e a dinâmica de consumo e renda. Dessa forma, pela primeira vez a poupança perdeu adeptos, enquanto todos os outros produtos financeiros foram mais utilizados. Laporta (2020) no site "Invest News" representou os principais investimentos em renda fixa no ano de 2020 em um gráfico, disposto na Figura 2:

Posteriormente a contextualização dos tipos de investimentos na renda fixa, no presente trabalho será realizada uma simulação em cada um destes através do site oficial do Tesouro Direto, onde uma quantidade x de dinheiro será aplicada em determinado período de tempo, e assim, se observará os juros de cada um e suas rentabilidades e diferenças, onde estarão disponíveis em um gráfico.

3 Métodos

No site oficial do Tesouro Direto é possível realizar simulações em vários tipos de investimentos. Inicialmente foi escolhido o título "Tesouro Selic 2025" para realizar as simulações, e assim, suposto um valor inicial investido de R\$1000,00 em Março de 2022. A data de resgate deste será em 01 de Março de 2025, sem aportes mensais até esta data.

Figura 2: Renda Fixa em 2020



Fonte: Laporta - Invest News (2020)

A simulação será realizada aplicando o valor inicial nos seguintes investimentos: Tesouro, Poupança, CDB, LCI/LCA e Fundo DI. Assim, posteriormente a realização da simulação, todos os dados e informações estarão dispostos na Tabela 1:

Tabela 1: Tesouro Selic 2025

Investimento	Valor Bruto Resgate (R\$)	Rent. Bruta (a.a)	Custos (R\$)	Imposto de renda (R\$)	Valor líquido resgate (R\$)	Rent. Líquida (a.a)
Tesouro	1286,35	8,80%	0,00	42,95	1243,40	7,57%
Poupança	1182,15	5,75%	0,00	0,00	1182,15	5,75%
CDB	1227,52	7,11%	0,00	34,12	1193,40	6,10%
LCI/LCA	1203,19	6,39%	0,00	0,00	1203,19	6,39%
Fundo DI	1233,56	7,28%	0,00	34,51	1195,91	6,17%

Fonte: Tesouro Direto (2022)

Cada uma das sete colunas da Tabela 1 apresentada representa uma característica associada ao valor investido, sempre na moeda brasileira real (R\$). O Valor Bruto de Resgate refere-se ao valor da aplicação na data do resgate antes da subtração de impostos e custos. A Rentabilidade Bruta refere-se ao percentual que a aplicação irá render a cada ano, também antes da subtração de impostos e custos. De acordo com o site oficial "Aplicativo Renda Fixa", a fórmula para se calcular o Valor Bruto de Resgate é constituída através dos juros compostos:

$$\text{Valor Bruto} = \text{Valor investido} \cdot (1 + \text{Rentabilidade Bruta})^{\text{período}}$$

Inicialmente a Rentabilidade Bruta que está em porcentagem, deve ser transformada em um número decimal, ou seja, deverá ser dividida por 100. Para ilustrar em um exemplo e facilitar a compreensão desta e das outras características referentes ao valor investido e o tipo de investimento, serão utilizados os dados do investimento "Tesouro".

4 Resultados e Discussão

Utilizando o valor inicial investido de R\$1000,00 em Março de 2022, com data de resgate em 01 de Março de 2025, juntamente aos dados do investimento "Tesouro", tem-se em um primeiro momento a Rentabilidade Bruta ao ano do investimento em questão, no caso de 8,80%. Dessa forma, como dito anteriormente, esta porcentagem deve ser alterada para um número decimal, assim:

$$\frac{8,80}{100} = 0,088$$

Como o período em questão é a diferença entre a data de resgate e a data atual, pode-se afirmar que será de aproximadamente 3 anos. Dessa forma, utilizando os dados obtidos na fórmula apresentada:

$$\text{Valor Bruto} = 1000 \cdot (1 + 0,088)^3$$

Desenvolvendo os cálculos, é possível obter um Valor Bruto de Resgate de aproximadamente R\$1286,35. A terceira coluna da Tabela 1 é referente aos custos, onde estes referem-se a cobrança de taxas como a de administração pela instituição financeira e a de custódia pela B3, como todas os investimentos citados são da renda fixa, os custos são todos de R\$0,00.

O Valor do imposto de renda segue o previsto na legislação para cada tipo de investimento. Segundo o site oficial "Aplicativo Renda Fixa" se o investidor possui em sua carteira títulos como CDB (Certificado de Depósito Bancário), RDB (Recibo de Depósito Bancário), LC (Letra de Câmbio), LF (Letra Financeira), Debêntures comuns e Tesouro Direto (Títulos Públicos Federais), as alíquotas praticadas sobre a rentabilidade são as seguintes: Até 180 dias de investimento, 22,5%; De 181 a 360 dias de investimento, 20%; De 361 a 720 dias de investimento, 17,5%; Acima de 720 dias, 15%.

Esta porcentagem se contabiliza em cima da diferença entre o Valor Bruto de Resgate e o valor investido. Como o período de resgate na simulação excede 720 dias, a alíquota é de 15% em todos os investimentos, exceto na poupança e LCI/LCA. Isto ocorre, segundo o blog "ParanáBanco Investimentos", dada a importância deles para o país, é uma forma de o governo baratear os empréstimos e atrair investidores.

Para calcular o Valor do Imposto de renda no investimento "Tesouro", por exemplo. Inicialmente se calcula a rentabilidade existente no Valor Bruto de Resgate:

$$R\$1286,35 - R\$1000,00 = R\$286,35$$

Posteriormente, é calculado a alíquota de 15% em cima do valor de rentabilidade encontrado no passo anterior, e assim é encontrado o Valor do imposto de renda:

$$15\% \cdot R\$286,35 = R\$42,95$$

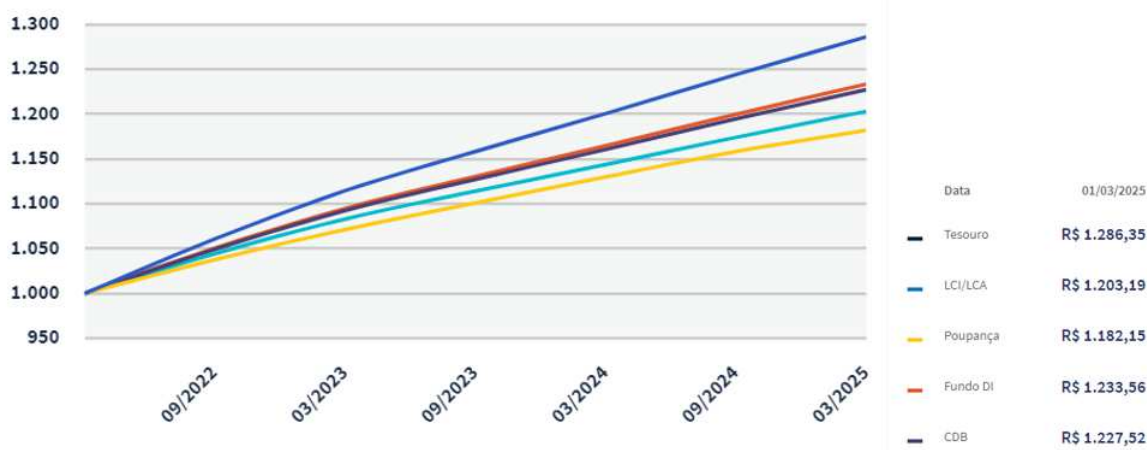
O Valor líquido do resgate em R\$ representa o valor que efetivamente o investidor irá receber no final do seu investimento, posteriormente a subtração de impostos e custos. Dessa forma, dando continuidade ao exemplo utilizando o investimento "Tesouro", o Valor líquido do resgate será a extração do Valor do imposto de renda calculado do Valor Bruto de Resgate:

$$R\$1286,35 - R\$42,95 = R\$1243,40$$

Dessa forma, o valor líquido de resgate do investimento "Tesouro" é de R\$1243,4. Para descobrir o Valor do imposto de renda e do Valor líquido o resgate em cada investimento, deverão ser realizados os cálculos nos passos anteriores para cada um. Por fim, a Rentabilidade Líquida refere-se ao percentual que a aplicação irá render a cada ano, novamente, posterior a subtração de impostos e custos.

Para uma melhor visualização dos dados obtidos na Tabela 1, ao realizar a simulação o site oficial do Tesouro Direto a Rentabilidade Bruta é apresentada em um gráfico, presente na Figura 3:

Figura 3: Rentabilidade Bruta - Renda fixa



Fonte: Adaptado de Tesouro Direto (2022)

Analisando a Tabela 1 e o gráfico pode-se observar que de todos os investimentos estudados o "Tesouro" é o mais vantajoso de se aplicar. Com a rentabilidade bruta sendo a mais alta, isso impacta diretamente no valor do imposto de renda, conseqüentemente acaba se tornando o maior. Porém, mesmo isso ocorrendo o valor líquido de resgate também acaba sendo o maior e mais vantajoso. O gráfico deste investimento é o que possui o maior crescimento, se afastando cada vez mais dos outros.

Da mesma forma que o "Tesouro" é o mais rentável, a "Poupança" se torna o investimento menos vantajoso para se investir. Por mais que este seja o mais popular na sociedade, o novo investidor deve analisar melhor suas opções. Analisando a Tabela 1, pode-se afirmar que a rentabilidade bruta da "Poupança" é a mais baixa entre todos os investimentos estudados, e mesmo não contabilizando um valor de imposto de renda, acaba tendo o menor valor líquido de resgate. Seu gráfico em amarelo se distancia gradativamente dos outros investimentos, especialmente do "Tesouro" em azul.

Realizando uma pesquisa no Riconnet (2021), foi levantado alguns prós e contras do investimento mais rentável e do menos rentável da renda fixa. A "Poupança", que seria o investimento menos vantajoso, possui alguns prós como a possibilidade de um resgate a qualquer momento, sua aplicação inicial é de R\$1,00, não há impostos e taxas. Porém seus contras se resumem em uma rentabilidade baixa, como comentado anteriormente.

Já no melhor investimento de se aplicar, ou seja o "Tesouro", a lista de prós é consideravelmente maior do que a de a de contras. Alguns prós que podem ser levantados são o baixo risco, a possibilidade de investimentos em índices importantes na economia como Selic, e o mais visível, a alta rentabilidade. Já os contras são apenas dois, as taxas e tributos, e sua precificação é determinada pelo mercado (pode render negativamente em caso de resgate antecipado de títulos

de longo prazo).

Analisando os outros investimentos pode-se verificar que o "CDB" e o "Fundo DI" possuem uma Rentabilidade Bruta e Líquida muito próximas uma da outra, tanto que o valor de seus impostos de renda variam em centavos. Seus gráficos em roxo e vermelho se interceptam nos primeiros meses de aplicação, depois percorrem ainda muito próximos. Estes não são nem os melhores investimentos, nem os piores.

Comparando os dois investimentos que possuem um Valor de imposto de renda de R\$0,00, pode-se afirmar examinando a tabela que a Rentabilidade Bruta e Líquida do "LCI/LCA" acaba sendo um pouco maior do que a "Poupança". Isso ocorre, segundo Ricconnet (2021), devido a taxa de rentabilidade do investimento "LCI/LCA" ser próxima de 100% do CD.

5 Conclusão

Monitorar o patrimônio vem se tornando uma busca constante, tentar diminuir os gastos e separar uma parte do dinheiro para os possíveis investimentos vem se tornando uma prática cada vez mais frequente entre os brasileiros. As opções para se investir são vastas, porém muitas pessoas ainda possuem receio de aplicar seu dinheiro, ou quando fazem, normalmente buscam a opção mais segura, sendo muitas vezes a mais popular no Brasil: a poupança.

Os investimentos em renda fixa são os mais seguros para um novo investidor, pois o retorno é garantido, independente do período de rendimento. Neste tipo de renda existem vários tipos de investimentos, como Tesouro, CDB, LCI/LCA, Fundo DI e o mais afamado dentre estes a poupança. Dentre estes investimentos existem diferenças, como o percentual de rentabilidade, se existem ou não taxas como imposto descontados, como se aplicar, logo, quando se pretende aplicar o melhor a fazer é estudar todas as opções.

Com isso, alguns investimentos acabam sendo melhores de se empregar do que outros, como foi contextualizado no decorrer do trabalho. Após a simulação de investimento, foi constatado que o investimento "Poupança" é o que possui a menor rentabilidade dentre os estudados, já o investimento "Tesouro" além de ser o mais seguro, é o mais lucrativo.

Em suma, o mercado financeiro está em constante crescimento pois atualmente o ato de obter informações ocorre de fácil acesso. Assim, ao se aventurar no mundo de investimentos é necessário pesquisar e entender qual é a melhor opção para a aplicação, pois com a pesquisa foi possível analisar que o mais famoso nem sempre é o mais rentável.

Referências

- [1] Anbima. **Pandemia muda hábitos de poupança do brasileiro e estimula investimento em produtos financeiros.** 2021. Disponível em: <https://www.anbima.com.br/pt_br/noticias/pandemia-muda-habitos-de-poupanca-do-brasileiro-e-estimula-investimento-em-produtos-financeiros-8A2AB2B67AE5FC72017AECF335BD4E4C-00.htm> Acesso em: 07 mar 2022.
- [2] Anbima. **Raio X do Investidor Brasileiro - 3 edição.** 2020. Disponível em: <https://www.anbima.com.br/pt_br/especial/raio-x-do-investidor-2020.htm> Quem Acesso em: 08 mar 2022.

- [3] Aplicativo Renda Fixa. **Entenda a tributação dos investimentos de Renda Fixa.** Disponível em: <<https://blog.apprendafixa.com.br/investimentos/tributacao-dos-investimentos/>> Acesso em: 07 mar 2022.
- [4] Aplicativo Renda Fixa. **Rentabilidade bruta x Rentabilidade líquida.** Disponível em: <<https://blog.apprendafixa.com.br/investimentos/rentabilidade-bruta-e-rentabilidade-liquida-voce-sabe-a-diferenca/>> Acesso em: 09 mar 2022.
- [5] CAVALCANTE, F.; MISUMI, J. Y.; RUDGE, L. F. Mercado de Capitais: o que é, como funciona. 7. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.
- [6] CLELAND, David I.; IRELAND, Lewis R. **Gerência de projetos.** Rio de Janeiro: R&A Editores, 2002.
- [7] COELHO, C. G.; LARA, F. H.; CUNICO, E. **Investimentos de baixo risco: comparação entre tesouro direto e poupança.** Programa de Pós-Graduação do Centro Universitário Assis Gurgacz - FAG, 2019. Disponível em: <<http://tceonline.fag.edu.br:8080/app/webroot/files/trabalhos/20190902-215357.pdf>> Acesso em: 06 mar 2022.
- [8] Guia do Investidor - Tesouro Direto. Secretaria do Tesouro Nacional. Disponível em: <https://repositorio.enap.gov.br/bitstream/1/6248/1/Guia_Investidor%20TD.pdf> Acesso em: 07 mar 2022.
- [9] JEVINSKI, E. L. **Um estudo de caso envolvendo o investimento de recursos no cultivo de soja, na caderneta de poupança ou em uma Letra de Crédito do Agronegócio.** Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, 2016.
- [10] KREUTZ, R. R.; VIEIRA, K. M.; OLIVEIRA, G. M. **Tesouro Direto, poupança ou IBOVESPA, qual o melhor investimento?** Revista Negócios em Projeção, v 9, n°1, ano 2018. Disponível em: <<http://revista.faculdadeprojecao.edu.br/index.php/Projecao1/article/view/1070/937>> Acesso em: 06 mar 2022.
- [11] LAPORTA, Taís. **Os melhores e piores investimentos de 2020.** Invest News, Finanças, 2020. Disponível em: <<https://investnews.com.br/financas/os-melhores-e-piores-investimentos-de-2020/>> Acesso em: 09 mar 2022.
- [12] ParanáBanco - Investimentos. Entenda como funciona a tabela agressiva da renda fixa. Disponível em: <<https://paranabanco.com.br/blog/investimentos/entenda-como-funciona-tabela-regressiva-da-renda-fixa>> Acesso em: 08 mar 2022.
- [13] Riconnet. **Poupança ou Tesouro Direto? Veja qual o melhor investimento.** 2021. Disponível em: <<https://riconnect.rico.com.vc/blog/poupanca-ou-tesouro-direto>> Acesso em: 09 mar 2022.
- [14] RICO, T. **Investir em Renda Variável: Guia para começar sem medo** Riconnect, 2020. Disponível em: <<https://riconnect.rico.com.vc/blog/renda-variavel>> Acesso em: 06 mar 2022.
- [15] RICO, T. **Renda Fixa: O que é, Como funciona, Dicas para investir.** Riconnect, 2021. Disponível em: <<https://riconnect.rico.com.vc/blog/renda-fixa>> Acesso em: 06 mar 2022.



IX Semana da Matemática da UTFPR - Toledo
Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e
tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

- [16] Tesouro Direto. Simulador de investimentos: Tesouro Selic 2025. 2022. Disponível em: <<https://www.tesourodireto.com.br/simulador/?titulo=1250>> Acesso em: 09 mar 2022.
- [17] XP. **CDB: O que é e como investir?** Disponível em: <<https://www.xpi.com.br/investimentos/renda-fixa/cdb/capitulo-3>> Acesso em: 07 mar 2022.
- [18] XP. **LCA: O que é Letra de Crédito do Agronegócio?** Disponível em: <<https://www.xpi.com.br/investimentos/renda-fixa/lca/>> Acesso em: 07 mar 2022.
- [19] XP. **LCI: O que é Letra de Crédito Imobiliário e como investir?** Disponível em: <<https://www.xpi.com.br/investimentos/renda-fixa/lci/>> Acesso em: 07 mar 2022.



O PROCESSO DE RECONFIGURAÇÃO DE UM GAME PEDAGÓGICO: RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA¹

Jenifer Haupenthal
Colégio Estadual Presidente Castelo Branco
jeniferhaupenthal3@gmail.com

Tainá Delanora
Colégio Estadual Presidente Castelo Branco
tainadelanora36@gmail.com

Renato Francisco Merli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
renatomerli@utfpr.edu.br

Resumo

Tendo em vista que a tecnologia está cada vez mais presente nos métodos de ensino e que, as crianças e adolescentes nascem imersos nesse meio, os jogos educacionais são alternativas para o ensino, uma vez que fazem parte da realidade de uma grande parte dos alunos. Considerando esse contexto, propomos reconfigurar um jogo pedagógico já existente, o “Arquipélago da Matemática”, o qual aborda conteúdos como potenciação, radiciação, expressões numéricas, equações e sistemas de equações. O jogo em tela, uma versão ainda em desenvolvimento, não possui muitas características de um *game* pedagógico que utiliza os princípios de *Design de Games*. Assim, realizamos a reconfiguração de uma ilha do jogo utilizando os “7 princípios para um Game Design de Jogos Educativos e Divertidos” (Costa, 2008, 2010). No decorrer dessa experiência de Iniciação Científica, realizamos um estudo teórico sobre a teoria de *Design de Games*, aplicando esses conhecimentos no aprimoramento de um jogo pedagógico. Além disso, percebemos a melhoria nas características de entretenimento e na sequência lógica dos conteúdos matemáticos do jogo.

Palavras-chave: *Design de Games*. Ensino de Matemática. Jogos Pedagógicos.

1 INTRODUÇÃO

Ainda hoje, com o intenso desenvolvimento da tecnologia, existe uma grande dificuldade de encontrar jogos educacionais digitais bem estruturados, seja nos detalhes de design e interatividade, ou no layout e portabilidade do jogo. Essa dificuldade em encontrar tais jogos, aliada ao que Prensky (2001) denominou de aumento dos nativos digitais, nos levou a reconfigurar um jogo pedagógico em desenvolvimento, de modo que ele possua as características da teoria de *Design de Games*.

O desenvolvimento de um game, segundo Prensky (2001), pode não ser atraente para os alunos se realizado apenas por designers instrucionais e não em conjunto com designers

¹ O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022.

de games. Ele salienta que, um game pedagógico eficiente e motivador exige muito mais do que uma estrutura lógica e programacional, necessita de estímulos às diversas habilidades as quais o estudante precisa aprender, bem como deve estar aliado aos estímulos de prazer e motivação dos jogos comerciais de entretenimento.

Nesse contexto, procuramos responder à pergunta: *É possível reconfigurar um jogo pedagógico já existente a partir de princípios da teoria de Design de Games? Se sim, quais características são essenciais nessas mudanças?*

Para responder a essas perguntas, na próxima seção situamos o leitor sobre o que é e quais são as características do jogo Arquipélago da Matemática. Na sequência apresentamos nossos estudos sobre a teoria de *Design de Games* e, posteriormente as reconfigurações que realizamos no jogo. Por fim, apresentamos nossas conclusões sobre o trabalho.

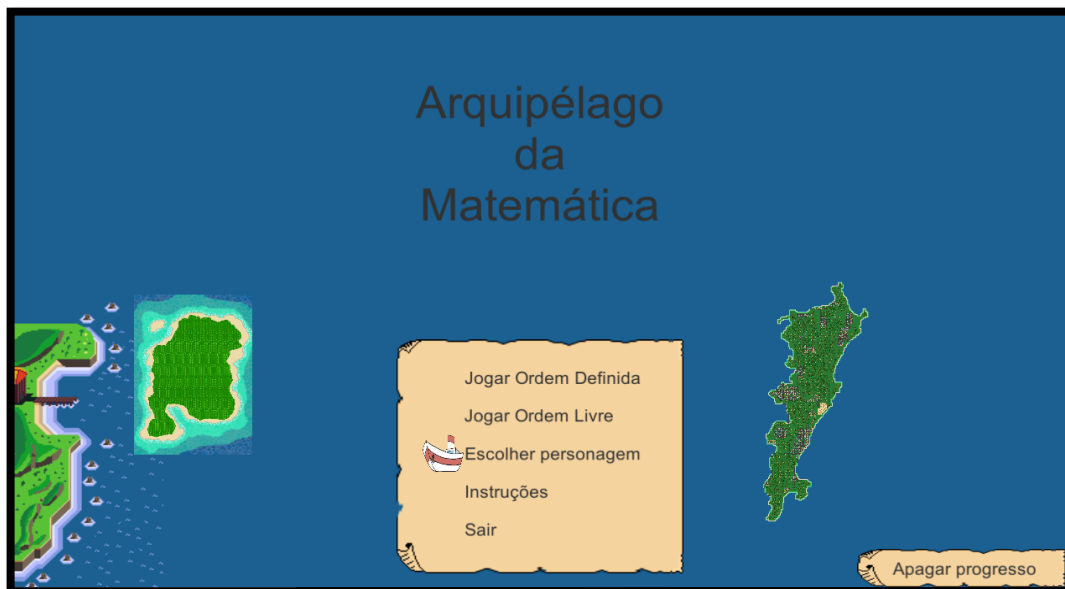
2 O JOGO ARQUIPÉLAGO DA MATEMÁTICA: SITUANDO A PESQUISA

Adotamos o jogo “Arquipélago da Matemática”, que é um jogo existente, mas ainda em desenvolvimento pelo grupo de pesquisa o qual fazemos parte. Esse grupo, formado por professores e estudantes dos cursos de Licenciatura em Matemática, Tecnologias para Sistema de Internet e Engenharia Eletrônica, tem se dedicado a desenvolver jogos pedagógicos para o ensino de matemática. Nesse contexto, o Arquipélago da Matemática é o primeiro game pedagógico, fruto desse grupo. Na ocasião, o jogo foi desenvolvido sem levar em consideração o que Pelling (2011) chamou de *processo de gamificação* e processos que utilizem a teoria do *Design de Games*.

O objetivo do jogo é explorar três ilhas avançando por meio de trilhas por praias, montanhas e pontos históricos. Para avançar na ilha é preciso resolver questões de matemática que envolvem conteúdos de potenciação, radiciação, equações de primeiro grau, função do primeiro grau e sistemas lineares. Cada ilha aborda sobre um ou mais conteúdos matemáticos citados.

Na tela inicial (Figura 1), o jogador tem algumas opções: jogar em ordem definida, jogar em ordem livre, escolher um personagem, instruções e sair. E possui ainda, a possibilidade de deletar o progresso das atividades.

Figura 1 – Tela Inicial do Jogo



Fonte: Dos Autores (2022)

O jogador, ao escolher a opção de jogar na “ordem definida”, segue o caminho que o jogo determina. Para desbloquear a próxima ilha da sequência, ele deve concluir a ilha anterior e realizar todas as atividades matemáticas presentes nela. A opção do jogador, “ordem livre”, dá a possibilidade de escolher qual ilha pretende visitar primeiro sem a necessidade de completar os outros conteúdos do jogo. Nesse formato, o jogador pode exercitar um conteúdo matemático específico.

O aluno também tem a opção de escolher entre dois possíveis personagens, conforme podemos verificar na Figura 2.

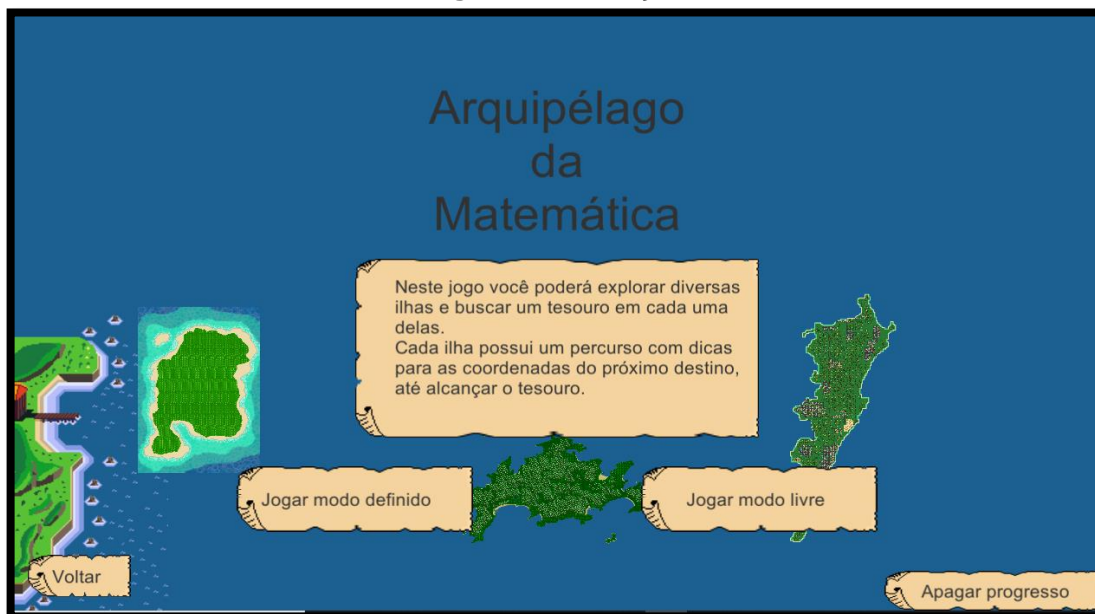
Figura 2 - Escolha de personagem



Fonte: Dos Autores (2022)

Ainda na tela inicial, existe a possibilidade de o jogador acessar as instruções do jogo, de modo que pode consultá-las a qualquer momento do jogo, conforme Figura 3.

Figura 3 - Instruções



Fonte: Dos Autores (2022)

Para avançar dentro de cada ilha, são apresentadas questões cuja resposta é uma coordenada cartesiana que levará o jogador ao próximo ponto a ser explorado. As imagens do jogo são sobrepostas, ao fundo, por um plano cartesiano, onde é possível visualizar as coordenadas x e y . A Figura 4 nos mostra uma percepção disso.

Figura 4 - Plano cartesiano sobreposto a Ilha

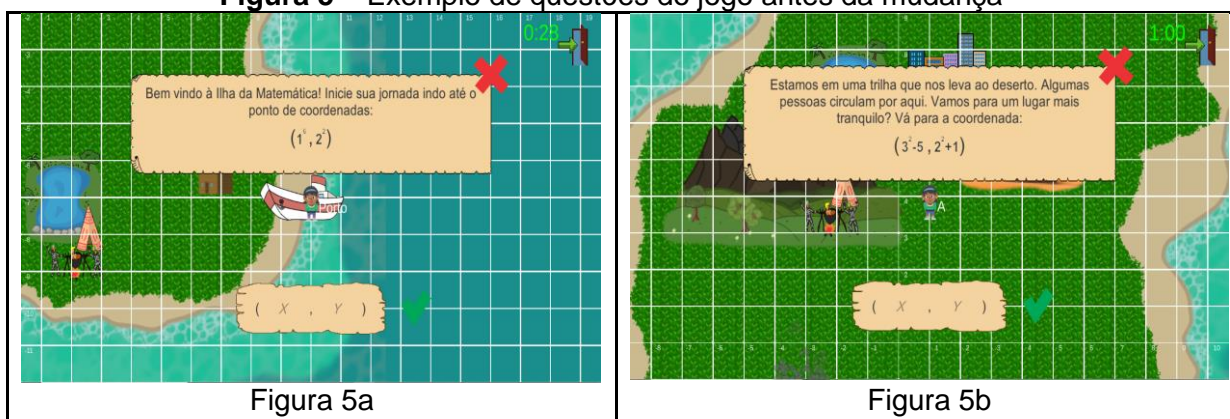


Fonte: Dos Autores (2022)

A primeira ilha do game (Ilha da Matemática) envolve potenciação, radiciação e equação do 1º grau, a segunda (Ilha Grande) aborda questões sobre função do 1º grau e a terceira (Ilha de Florianópolis), aborda sistemas de equações lineares.

Em sua primeira versão (alfa), a apresentação dessas expressões não era feita de forma a trazer uma dificuldade crescente, bem como não estava na ordem em que, geralmente os livros didáticos apresentam esses conteúdos (Figuras 5a e 5b).

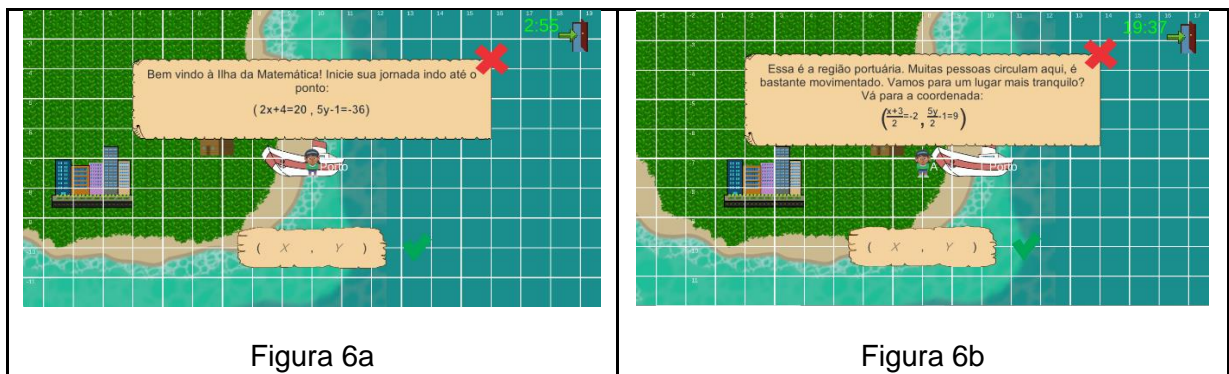
Figura 5 – Exemplo de questões do jogo antes da mudança



Fonte: Dos Autores (2022)

Por exemplo, a primeira questão (Figura 6a) apresentada na Ilha da Matemática é $2x + 4 = 20, 5y - 1 = -36$, já a segunda questão $(x + 3)/2 = -2, 5y/2 - 1 = 9$ (Figura 6b). Se entendermos que, antes da resolução de equações é necessário ter conhecimentos de potenciação e radiciação, percebemos que não há critério de linearidade e dificuldade.

Figura 6 – Exemplo de questões antes da mudança



Fonte: Dos Autores (2022)

Observamos também a forma como as expressões estavam relacionadas com o jogo. Na primeira versão não havia um enredo ou história conectando as questões umas as outras. Quanto ao design gráfico, percebemos algumas inconsistências entre o gráfico e as imagens.

Assim, sentimos a necessidade de buscar mais elementos teóricos que permitissem melhorar o jogo em tela. Nesse sentido, o *Design de Games* foi a nossa base teórica, a qual apresentamos logo na sequência.

3 DESIGN DE GAMES

De acordo com Schell (2011, p. XII), “[...] design de jogos é o ato de decidir o que um jogo deve ser”. Para o autor, um bom *Design de Games* “[...] acontece quando você visualiza seu jogo a partir de várias perspectivas possíveis”. Nesse contexto, é importante compreender quais os elementos para desenvolver um game. Schell (2011) apresenta de forma precisa e detalhada os princípios fundamentais do design de jogos. Conforme o autor, para ser um bom designer você deve abranger novas ideias, criar novos estilos e estar aberto a incorporar novas ideias.

Para desenvolvedores de games o novo por muitas vezes pode ser algo complicado, uma vez que é necessário incluir princípios desconhecidos. De acordo com Schell (2011), se jogarmos sempre de maneira segura e nunca incluindo novas técnicas, podemos acabar gerando jogos “simplistas” demais, o que não permite o uso de métodos para além dos habituais.

O design de jogos é um processo longo e delicado. Podemos aprender muitas coisas por meio de exemplos teóricos, mas na prática do jogo, é possível verificar o erro de forma instantânea, o que permite uma mudança de estratégia ou de esquema cognitivo em tempo real.



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022.

Assim, Costa (2008, p. 109-110) apresenta 7 princípios que um jogo pedagógico deve obedecer para ser efetivo como os jogos de entretenimento:

1. Um jogo com fim pedagógico deve possuir pelo menos uma estrutura similar ou comum à estrutura do objeto de conhecimento.
2. Essa estrutura do jogo deve ser perceptível ao jogador enquanto o joga.
3. A aprendizagem dessa estrutura deve ser indispensável para que se atinja o(s) objetivo(s) no jogo.
4. Em um jogo com fim pedagógico, tudo deve estar a favor da diversão e do entretenimento.
5. O objeto de conhecimento deve estar relacionado ao jogo a que pertence por relações estruturais essenciais (relações ρ) em prol da diversão e do entretenimento dos jogadores.
6. No que depender do seu objeto de conhecimento, um jogo com fim pedagógico deve ser uma forma essencial de jogo.
7. Um jogo com fim pedagógico deve ser, pelo menos para o seu público-alvo, melhor como jogo que qualquer uma de suas partes ou a simples soma delas.

O autor destaca que tais princípios podem ser divididos em duas partes: “[...] primeira parte, do 1º ao 3º princípio, está diretamente relacionada à aprendizagem do objeto de conhecimento. A segunda parte, do 4º ao 7º princípio, está diretamente relacionada à diversão e ao entretenimento” (Costa, 2008, p. 111).

O primeiro princípio mostra que devemos sempre apresentar uma estrutura similar ao conteúdo que irá ser trabalhado, pois de acordo com o autor isso fará que o jogador perceba que a estrutura apresentada no game gira em torno do mecanismo do jogo e isso acaba gerando um entendimento melhor sobre o conteúdo apresentado (Costa, 2010).

Outro fator importante que deve ser levado em consideração é se o game gera diversão no jogador. Costa (2010), afirma que muitos jogos educacionais se preocupam demais com o conteúdo educacional que será trabalhado no game deixando de lado a diversão do jogador. Diante disso, devemos levar em consideração que a diversão é um fator importante para que um jogo apresente um impacto positivo no jogador.

Outro princípio importante apresentado por Costa (2010) é a aprendizagem, pois sem ela, o jogador não conseguirá concluir seus objetivos no game. Em outras palavras, o jogador necessita de um jogo que seja capaz de ensiná-lo enquanto ele joga. Portanto, é de extrema importância que um designer de games tenha noção do estilo de aprendizagem de cada jogador e adicione essas características à jogabilidade do jogo.

4 RELATO DO PROCESSO DE RECONFIGURAÇÃO DO JOGO

Após realizadas as pesquisas, procuramos solucionar os problemas encontrados. Um deles era o fato das questões não apresentarem algum tipo de relação evolutiva, ou seja, a



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022.

expressão utilizada nas primeiras perguntas já é avançada. Pensando nisso, para facilitar a compreensão do estudante organizamos as expressões em “níveis de dificuldade”, de forma que ele só poderá responder a questão seguinte se tiver compreendido a anterior, começando com a forma mais básica do conteúdo matemático escolhido até o nível mais avançado.

No nosso caso, na primeira Ilha, estipulamos o conteúdo de potenciação como objetivo de aprendizagem. Assim, após a reestruturação, as duas primeiras coordenadas foram: 1) $(1^6, 2^2)$ e 2) $(3^2 - 5, 2^2 + 1)$.

Algumas perguntas poderiam surgir: *por que essas coordenadas? como podemos certificar que o estudante compreendeu o processo de resolução?* Para isso possibilitamos que o erro do jogador seja seu aliado. Assim, na potência 2^2 , caso seja multiplicada a base pelo expoente (2×2), o resultado será correto, mas a forma de resolução não é, para o aluno compreender que se deve multiplicar a base pelo número de vezes do expoente, é proposta a expressão 3^2 , de modo que, se o jogador considerar o processo de multiplicar a base pelo expoente (3×2), ela irá errar.

Nesse momento, ele precisará entrar em choque com o esquema que ele imaginava ser o correto. Ao fazer isso, o erro o leva a refletir sobre a causa do mesmo e, a partir do momento que buscar um novo esquema, como por exemplo, multiplicar 3×3 , ele encontrará a resposta correta e terá confiança de que seu novo esquema está, temporariamente, correto.

Outro aspecto pontuado sobre problemas no jogo foi o aspecto gráfico. Nesse aspecto, tivemos excessiva dificuldade em resolver, pois no nosso grupo de pesquisa, não temos participantes com conhecimento para realizar tais mudanças.

Todavia na falta desse participante no grupo, as autoras deste trabalho buscaram técnicas e softwares que pudessem ajudar nessa empreitada. Dentre diversos softwares e técnicas, optamos pelo “Aseprite²” para desenvolver os cenários das ilhas presentes no jogo.

Ao longo do projeto de pesquisa, algumas perspectivas foram analisadas para averiguar qual caberia dentro do modo de jogo desenvolvido. Inicialmente experimentamos a perspectiva “isométrica” como mostra a Figura 7.

² O Aseprite pode ser acessado em: <https://www.aseprite.org/>.

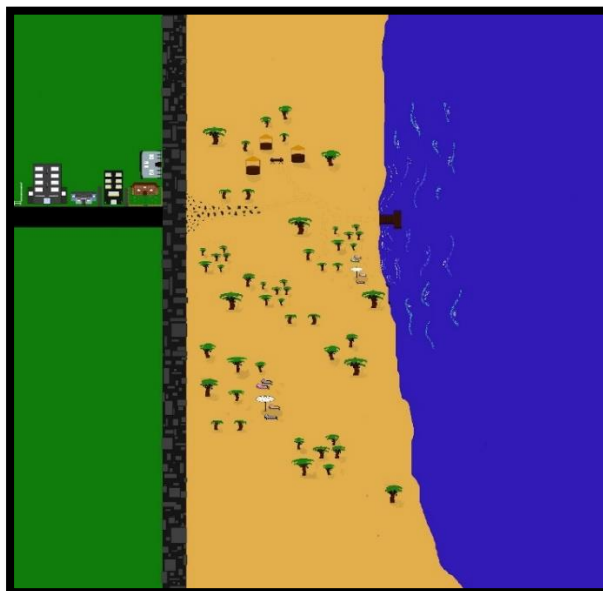
Figura 7 - Primeiro cenário do jogo na ilha, feita utilizando perspectiva isométrica



Fonte: Dos Autores (2022)

Essa perspectiva não se mostrou efetiva para a mecânica do jogo, com isso partimos para uma abordagem mais simples e que permitisse uma visão mais ampla do mapa. Essa mudança de perspectiva, para uma superior, pode ser vista na Figura 8.

Figura 8 - Primeiro cenário do jogo na ilha, feito utilizando perspectiva vertical



Fonte: Dos Autores (2022)

Essa nova imagem estará na próxima versão do jogo, uma vez que não houve tempo suficiente para implementá-la, mas que conseguimos ainda realizar algumas modificações no enredo acrescentando informações históricas da ilha, como por exemplo, a questão de



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022.

número 8, da segunda ilha, que possui o seguinte enunciado, “as ruínas do Lazareto foram utilizadas como hospital de quarentena até 1913. Parece um lugar ótimo para buscar pistas do tesouro! Para chegarmos lá precisamos resolver o problema que encontramos: um retângulo de lados x e y tem um perímetro de 24m. Sabendo que o lado y mede 4m, quanto mede o lado x ? A resposta deste problema é a localização das ruínas”.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do texto procuramos responder à pergunta: *É possível reconfigurar um jogo pedagógico já existente a partir de princípios da teoria de Design de Games? Se sim, quais características são essenciais nessas mudanças?*

Em relação à primeira pergunta, podemos afirmar que é possível alterar o jogo pedagógico a partir da teoria de *Design de Games*, como mostramos. Durante todo o processo de avaliação e reestruturação do “Arquipélago da Matemática”, nos deparamos com inúmeras lacunas, tais como, o excesso de informação sem a preocupação de criar um ambiente de entretenimento.

Do ponto de vista da segunda pergunta, consideramos que as características essenciais são aquelas relacionadas ao *Design de Games*: o jogo pedagógico deve possuir uma estrutura, perceptível ao jogador, que esteja relacionada ao objeto de conhecimento do qual objetiva-se ensinar; o objetivo do jogo deve ser a aprendizagem do objeto de conhecimento em questão; o jogo pedagógico deve ter diversão e entretenimento; o objeto de conhecimento deve estar articulado ao jogo e contar com elementos de diversão e entretenimento dos jogadores; o jogo pedagógico deve ser, ao menos para os alunos, melhor como jogo do que como metodologia de ensino.

Assim, no game apresentado, todas as problemáticas relacionadas as características elencadas foram modificadas. Após inúmeras leituras e aprofundamentos sobre o *Design de Games*, acreditamos que conseguimos estabelecer um equilíbrio entre o *Design de Games* e a parte pedagógica do jogo.

Diante disso, inferimos que um game pedagógico não é feito somente para diversão, nem tão pouco apenas para fins didáticos. É necessário um equilíbrio entre esses dois fins. Assim, consideramos que situações que levem o aluno a se divertir e também questionar, fazem com que o processo de aprendizagem seja de maneira leve.



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022.

REFERÊNCIAS

COSTA, Leandro Demenciano. **O que os jogos de entretenimento têm que os educativos não têm: 7 princípios para projetar jogos educativos eficientes.** Teresópolis: Editora Novas Ideias; Rio de Janeiro: Editora PUC – Rio, 2010.

COSTA, Leandro Demenciano. **O que os jogos de entretenimento têm que os educativos não têm.** 2008. Princípios para projetos de jogos com fins pedagógicos. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Artes e Design, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008. Disponível em: https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/PUC_RIO-1_0261e6d01551de2bcd55a8d5b59b05e5. Acesso em: 17 mar. 2021.

PELLING, Nick. **The (short) prehistory of “gamification” ...**, 2011. Disponível em: <http://nanodome.wordpress.com/2011/08/09/the-short-prehistory-of-gamification/>. Acesso em: 17 mar. 2022.

PRENSKY, Marc. Digital Natives, Digital Immigrants. **On the Horizon**, v. 9, n. 5, oct., 2001. Disponível em: encurtador.com.br/jvzJS. Acesso em: 17 mar. 2022.

SHELL, Jesse. **A arte de game design: o livro original.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.



OPERAÇÕES COM FRAÇÕES POR MEIO DAS BARRAS CUISENAIRE: A IDÉIA DE MEDIÇÃO

Kauana Tomasi
Universidade Tecnológica Federal
do Paraná
Kauana_tomasi19@hotmail.com

Bárbara Winiarski Diesel Novaes
Universidade Tecnológica Federal
do Paraná

Resumo

No presente trabalho será referido o assunto de operações com frações, utilizando um método específico de ensino, a escala Cuisenaire. Este material nos propõe trabalhar as frações pensando na ideia de medição, assim fazendo com que o seu uso traga benefícios e facilidades ao ensino da matemática no ambiente de sala de aula. Há algumas décadas atrás as barras de Cuisenaire foram criadas, e até hoje, tem grande utilidade para o ensino da matemática. Em relação às operações de adição e subtração de frações com denominadores iguais ou diferentes há mais estudos que abordam esse problema e trazem avanços na compreensão. Para multiplicar e dividir com o material Cuisenaire encontramos somente trabalhos da década de 1960 e precisamos avançar nessa compreensão.

Palavras-chave: Barras Cuisenaire; Operações com Frações; Materiais Didáticos.

1. Introdução

O presente trabalho é um recorte do plano de trabalho de iniciação científica “O estudo das frações no primário por meio das barras Cuisenaire: a ideia de medição, iniciado em outubro de 2021 com financiamento da Fundação Araucária. Por meio deste, vamos apresentar a resolução de operações com frações com auxílio das barras de Cuisenaire. Procuraremos situar o leitor sobre aspectos históricos da criação desse material didático com vistas a compreender a ideia de frações como medição por meio do uso das barras de Cuisenaire no ensino primário desde as décadas de 1950, período da sua criação.

Estudos recentes de Amaral, Souza e Powell (2021) sobre o ensino de frações na atualidade trazem resultados que mostram que iniciar o estudo de frações pela medição e com suporte das barras Cuisenaire possibilita uma melhor aprendizagem por parte do aluno.



Tendo como pressupostos que saber usar corretamente um material didático estruturado para ensinar matemática é um saber profissional necessário ao professor que ensina matemática (NOVAES, NIÉRRRI, 2020). A utilização desse material, se usado de forma coerente, pode acarretar diversos benefícios para a aprendizagem de conceitos matemáticos e também traz auxílio para com o desenvolvimento do pensamento lógico matemático.

Para professores que cotidianamente passam por frustrações no ensino quando se trata do assunto frações, é de grande valia a busca por recursos que beneficiem tanto a sua didática de ensinar quanto a aprendizagem dos alunos. Tendo em vista os Guias Curriculares de São Paulo, no qual destacam-se onze possibilidades para o estudo de diversos conceitos matemáticos, o material Cuisenaire está entre os dois mais completos (OLIVEIRA, 2019).

Se voltarmos o olhar um pouco para Base Nacional Comum Curricular, podemos identificar já no 5º ano do Ensino Fundamental I o ensino de comparações e representações fracionárias e algo relacionado às operações com frações, como por exemplo cálculos de porcentagem envolvendo as frações. No 6º ano do Ensino Fundamental II já começam os estudos voltados às operações com frações, também a ideia de equivalência e comparação. Já no 7º ano, entra a questão das frações e seus significados, como parte de um todo, razão, operador e resultado de uma divisão (BRASIL, 2018).

2. A ideia de medição nas barras Cuisenaire

O professor Émile George Cuisenaire Hottelet (1891-1980) em uma de suas aulas, fica comovido com o desespero de um de seus alunos por não conseguir aprender os conceitos básicos de matemática, o que o inspirou a pensar em algo para suprir essa dificuldade. Ao chegar em casa, Cuisenaire se põe a confeccionar pedaços de madeira, como se fossem réguas, cada qual com tamanhos e cores distintas, com o intuito de ajudá-lo no ensino dos conceitos básicos matemáticos aos alunos utilizando esse material, que ficou conhecido como as barrinhas de Cuisenaire (ABREU; SANTOS; RODRIGUES, 2018).

Conhecido também por Escala Cuisenaire, este material é constituído por 241 barrinhas de madeira, em formato de paralelepípedo, com 10 cores e tamanhos diferentes. Trata-se de um material extremamente resistente, por ser feito de madeira, porém nada impede de confeccioná-lo usando papel ou cartolina, por exemplo, desde que respeite suas medidas e cores correspondentes.



Pode-se pensar que cada uma dessas barrinhas representa um número de 1 a 10, e cada um desses números vai ser representado por uma cor e medida diferente. Por exemplo, o cubinho da cor branca ou madeira, que mede 1 centímetro, representa o número 1, já a barrinha vermelha, que mede 2 centímetros, representa o número 2 e assim por diante, até chegar na barrinha da cor laranja, que mede 10 centímetros e representa o número 10, como na Figura 1.

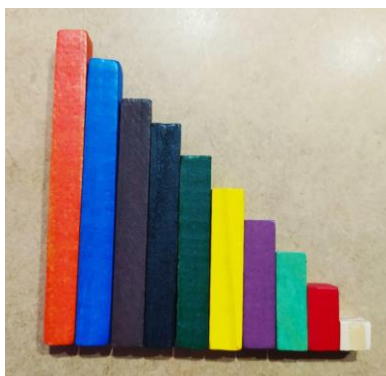


Figura 1 – Escala Cuisenaire

Fonte: Elaborado pelas autoras

Segundo Amaral, Souza e Powell (2021, p. 20):

As barras de Cuisenaire além de favorecerem a construção de significados matemáticos e imagens mentais sobre frações e operações de frações pela perspectiva de medição, também permitem que os professores direcionem a atenção dos alunos para simples, porém poderosas, visualizações de frações: Medindo comprimentos com as barras de Cuisenaire e identificando relações entre as barras.

Contudo, este material pode ser utilizado para trabalhar diversos tipos de operações com frações. Destacando que a escala de Cuisenaire é um material um tanto quanto atrativo aos olhos dos alunos, pelo fato de serem peças coloridas e de fácil manuseio, isso permite aos alunos criarem maior intimidade e curiosidade pelo material e por consequência, faz despertar mais interesse sobre o assunto matemático a ser tratado.

Quando falamos de frações, o que primeiramente vem ao pensamento é uma parte de um todo, ou até mesmo, uma forma diferente de escrever uma divisão, porém existem mais interpretações sobre as frações, além destas duas citadas, que são as mais conhecidas e usadas. Dentre essas diferentes interpretações podemos citar: A fração como operador, parte-todo, razão, medida e quociente (NOVAES; TORTOLA; VERTUAN, 2021).



O material Cuisenaire é um ótimo aliado quando se trata de frações e nada melhor para exemplificar estas interpretações, senão usando as próprias barrinhas. Para este trabalho o foco será mais voltado às frações como medida, ou medição. Observamos a Figura 2.

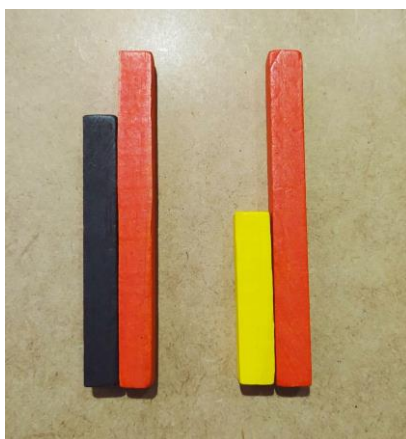


Figura 2 – Frações como medição

Fonte: Elaborado pelas autoras

Acima, estão dispostas as representações das frações $\frac{8}{10}$ e $\frac{5}{10}$. Para fazer uma comparação envolvendo estas, podemos usar a ideia de frações como medida, ainda mais por se tratarem de frações de mesmo denominador, representado pela barra laranja, pois assim, basta comparar as medidas das barras marrom e amarela, as quais representam os numeradores, e analisar qual a maior barra. Depois disto fica fácil concluir que a barra de maior medida irá representar a maior fração.

Agora, caso as frações tenham denominadores diferentes, o processo é feito de forma análoga, só é necessário antes realizar um processo de equivalência - a “corrida das cores¹” (AMARAL, SOUZA E POWELL), que fará com que as frações tenham um denominador comum e então bastará comparar suas medidas para conseguir sucesso na resposta.

3. Estudos históricos sobre barras Cuisenaire

Na década de 1960 o Material de Cuisenaire chega ao Brasil, com a ajuda do educador Caleb Gattegno, que faz a divulgação deste material em diversas partes do mundo, pode-se citar também o livro do professor e pedagogo Angel Diego Márquez (1923-2001): Didática das matemáticas elementares: o ensino das matemáticas pelo método dos

¹ A corrida das cores será explicada mais adiante.



números em cor ou método Cuisenaire, que dispõe de diversas inovações referentes a este material em tempos de Movimento da Matemática Moderna (OLIVEIRA, 2019; NOVAES, NIERRI, 2020)

Aos educadores que estavam à procura de métodos e técnicas diferenciadas para ensinar matemática, a escala Cuisenaire foi e continua sendo uma ótima opção, pois se trata de um material bastante completo e de rápida aquisição dos mecanismos, quando se trata de operações matemáticas ou até mesmo, um bom aliado para a resolução de problemas. “Deste modo o Método Cuisenaire pode ser utilizado como procedimento de iniciação matemática sem comprometer o rigor dedutivo exigido por esta disciplina.” (NOVAES; NIÉRRRI, 2020, p.3)

Segundo Oliveira (2019), mesmo quando as escolas passam por mudanças pedagógicas e culturais, sempre há algumas práticas e conhecimentos que continuam sendo válidos, mesmo depois do passar do tempo e de mudanças serem feitas, contudo, pode-se dizer que o emprego do material de Cuisenaire para ensinar matemática parece ser um exemplo desta permanência.

Destacadamente, o uso de material concreto, aos moldes das barrinhas Cuisenaire, introduziu uma nova prática para ensinar e possibilitar a construção do conceito de número pelas crianças. A possibilidade de manipular, experimentar, concretizar e validar hipóteses parece conferir ao material a sua longevidade. (OLIVEIRA, 2019, p. 263)

4. Operações com frações por meio das barras Cuisenaire

Segundo Abreu, Santos e Rodrigues (2018, p. 287) “As escalas de Cuisenaire são usadas para facilitar o processo de aprendizagem das operações fundamentais da matemática; somar, subtrair, multiplicar e dividir, como também as propriedades comutativas e associativas.”

Quando falamos de soma de frações logo vem à cabeça: “Somo o número de cima com o número de cima e o número de baixo com o número de baixo”, “mantenho o de baixo e somo os dois números de cima” e assim por diante, mas o que nem todo mundo sabe é que existe um método mais eficiente e lúdico de trabalhar esse conteúdo, do que da forma tradicional, que é usando as barras de Cuisenaire.

Tendo em vista as seguintes frações: $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$, vejamos na Figura 3 como podemos representá-las usando as barrinhas:

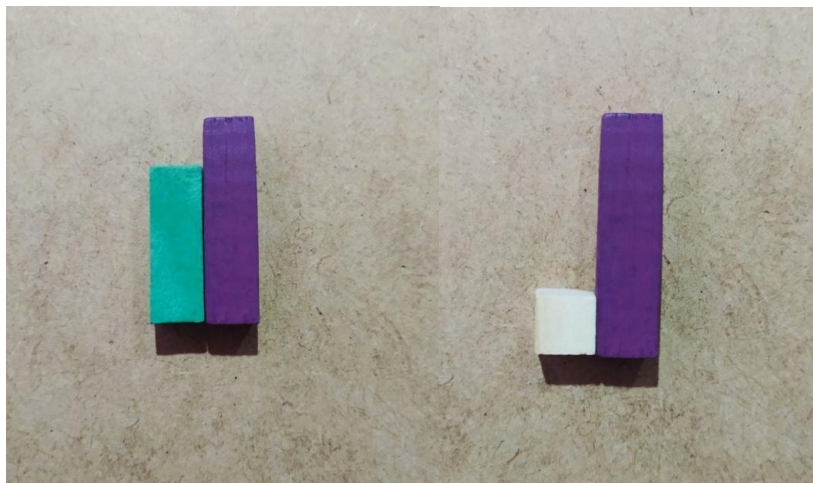


Figura 3 – Ilustração das frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$ respectivamente

Fonte: Elaborado pelas autoras

Vale destacar que, primeiramente precisa estar claro para os alunos qual a cor da barrinha que representa o respectivo número, para isso podem ser feitas atividades anteriormente para que eles fixem estes conceitos, assim como sugere o 4A Instructional Model, na fase das Ações Atuais usando o material Cuisenaire (AMARAL; SOUZA; POWELL, 2021).

Na Figura 3 observamos a barra roxa que representa o número 4, nas duas imagens, ou seja, está representando o denominador 4, das frações, por isso está disposta a direita das outras barras. Na primeira imagem podemos visualizar a barra verde-claro, que representa o número 3, ou melhor, o numerador da primeira fração, disposta a esquerda da barra roxa, formando então a fração $\frac{3}{4}$, da mesma forma acontece na segunda imagem, que está representando então, a fração $\frac{1}{4}$.

Operar com essas duas frações não é tarefa difícil pois ambas têm denominadores iguais, logo, não se faz necessário encontrar um denominador comum entre elas, além de que, utilizando as barras de Cuisenaire, a tarefa se torna ainda mais simplificada.

Tendo que a barra verde-claro representa 3 partes de um total de 4 e o cubo representa uma parte de 4, quando operamos com adição destas frações basta então, somar os numeradores e manter o denominador, ou seja, somar as barras da esquerda e manter a barra da direita, como na Figura 4.



Figura 4 – Adição de frações

Fonte: Elaborado pelas autoras

Contudo, fica fácil identificar o resultado desta soma de frações, que é $\frac{4}{4}$ ou 1 inteiro. Com a utilização das barras, os alunos conseguem identificar facilmente o resultado desta adição, pois utilizando a ideia de medição ao compararem as barras a visualização é instantânea, nem se faz preciso saber das regras envolvendo os numeradores e denominadores para realizar tal operação.

No exemplo apresentado os denominadores eram iguais, então bastava somar as barrinhas que representavam os numeradores das frações e estava pronto, mas agora, como realizar a soma de frações de denominadores diferentes usando a escala Cuisenaire? Suponho que a primeira coisa que passa na cabeça ao ouvir estas palavras é o famoso MMC, ou melhor, o mínimo múltiplo comum, e sim, é possível encontrar esse denominador comum usando este material, e de uma forma mais dinâmica e lúdica para se trabalhar em sala de aula, que é jogando a “corrida das cores”.

Esse jogo resume-se em dispor duas barras de cores diferentes as quais representam as unidades de medida das frações que se deseja comparar os comprimentos (AMARAL; SOUZA; POWELL, 2021). Por exemplo: Tendo as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{7}$ (Figura 5), a tarefa de somá-las já não é mais tão simples quanto no exemplo anterior.

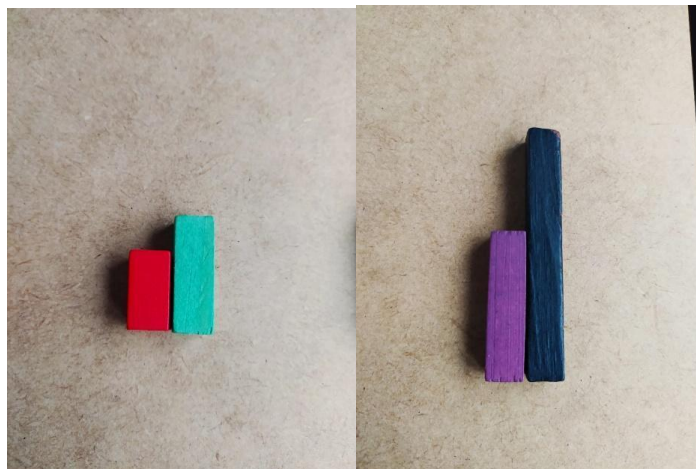


Figura 5 – Representação das frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{7}$

Fonte: Elaborado pelas autoras

Sabendo que para somar duas frações de uma forma fácil, é necessário que seus denominadores sejam iguais, que então, basta somar os numeradores e pronto. Mas como tornar os denominadores 3 e 7 em um denominador igual? A resposta é simples! Encontrando um denominador comum entre eles, ou melhor, o menor denominador entre esses dois números, e para isto usamos a corrida das cores.

Pega-se uma barra preta (que representa o número 7) e uma barra verde-claro (que representa o número 3) que são dispostas uma ao lado da outra, e inicia-se a corrida das cores. O intuito do jogo é ir completando de barras menores ao lado da maior, de forma que as duas fileiras de barras, também chamadas de monotrens (MÁRQUEZ, 1967), fiquem do mesmo comprimento, caso o monotrem de barras menores ultrapassar o comprimento do monotrem de barras maiores, continua-se adicionando mais barras, até que as duas fileiras obtenham o mesmo comprimento.

Ao fim da corrida das cores será possível observar que foram usadas 3 barras pretas e 7 barras verde-claro para então conseguir o mesmo comprimento entre os monotrens e encontrar o MMC das duas frações, como mostra a Figura 6.



Figura 6 – Fim da corrida das cores

Fonte: Elaborado pelas autoras

Logo, pode-se concluir que o novo denominador das frações será 21, pois como foram usadas 3 barras pretas, onde cada barra preta representa o número 7, multiplicando, obtemos 21, o mesmo acontece se realizados os cálculos com o monotrem verde-claro. Para os novos numeradores basta contar quantas barras verde-claro foram usadas e dispor essa mesma quantidade de barras vermelhas, e para o outro numerador, o mesmo processo, basta contar quantas barras pretas foram usadas para obter o MMC e dispor desta mesma quantidade de barras roxas, que era a barra que representava o antigo numerador.

Com isso formam-se então as novas frações, agora com mesmo denominador (Figura 7), bastando somente somar os seus numeradores para conseguir resolver essa operação de adição² de frações.



² A operação de subtração de frações com mesmo denominador e com denominadores diferentes não será abordada neste trabalho por serem bem semelhantes a adição.



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

Figura 7 – Novas frações

Fonte: Elaborado pelas autoras

Quando falamos de multiplicações de frações, é de grande valia levar em conta o método de operação usado no livro: Didática das Matemáticas Elementares, de Ángel Diego Márques, onde consegue-se visualizar as operações com as frações de uma forma simplificada, utilizando o material Cuisenaire.

Uma vez, dada a seguinte operação de multiplicação entre frações: $\frac{2}{3} * \frac{5}{7}$, como na Figura 8, em que são selecionadas as barrinhas das cores que representam os numeradores e os denominadores das frações citadas, teremos então:



Figura 8 – Representação das frações $\frac{2}{3} * \frac{5}{7}$

Fonte: Elaborado pelas autoras

Deve-se tomar então, a primeira fração e repetir as barrinhas vermelhas e verde-claro quantas vezes representar a quantidade da barra preta da outra fração, ou seja, tanto o numerador quanto o denominador da primeira fração serão repetidos a quantidade de vezes do número que representa o denominador da segunda fração, neste caso, sete vezes. Depois disso, observando a Figura 9, tem-se:



Figura 9 – Multiplicação de frações

Fonte: Elaborado pelas autoras

Com isso pode-se perceber que temos 7 barras vermelhas e 7 barras verde-claro, ou seja, $\frac{7}{7}$, e a segunda fração que estamos trabalhando é $\frac{5}{7}$ então o que deve ser feito agora, é tirar duas peças vermelhas, para que não tenha mais 7 peças desta cor, mas sim 5.

Feito isso, basta definir a fração resultante, onde tem-se no numerador 5 barrinhas vermelhas e no denominador 7 barrinhas verde-claro, formando então a fração $\frac{10}{21}$, que é o resultado desta multiplicação de frações. Observe a Figura 10:

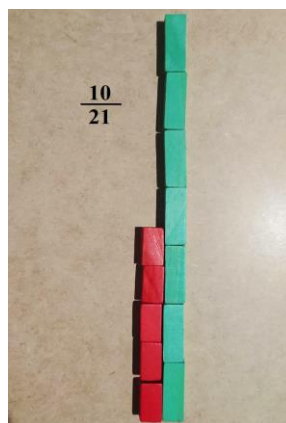


Figura 10 – Resultado da multiplicação de frações

Fonte: Elaborado pelas autoras

Já quando se trata de divisão entre frações usando este material, a forma a ser trabalhada se torna diferente. Na Figura 11, tomemos então a seguinte divisão fracionária:

$$\frac{1}{3} / \frac{4}{5}$$



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022



Figura 11 – Representação das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{4}{5}$

Fonte: Elaborado pelas autoras

Para realizar a divisão destas frações é necessário, primeiramente pensar em um número que seja divisível por 3 e 5 ao mesmo tempo, não exatamente precisa ser o MMC, porém quanto menor o número encontrado, menos trabalho dará na hora de trabalhar com as barrinhas. Segundo Márquez (1967) seria interessante para ser trabalhado em sala de aula, se cada grupo de alunos usar um divisor diferente para a tarefa.

Para este exemplo vamos utilizar o número 15 como um divisor comum entre eles. Contudo, repete-se as barrinhas que representam o 3 e o 5, no caso, as barras vermelhas e amarelas, lado-a-lado, até que completem 15, formando assim dois monotrens de medida 15. Como na Figura 12:

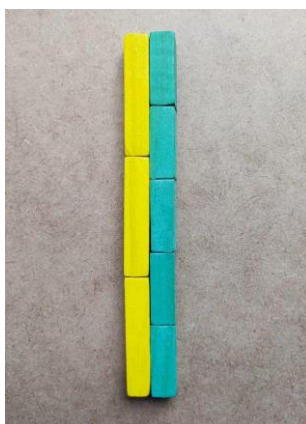


Figura 12 – Construindo os monotrens

Fonte: Elaborado pelas autoras

Na Figura acima podemos observar que os monotrens formados foram de 5 barrinhas verde-claro e 3 barrinhas amarelas, porém o que a operação está pedindo, é somente 4 partes de 5 e 1 parte de 3, contudo, tem-se algo como na Figura 13:

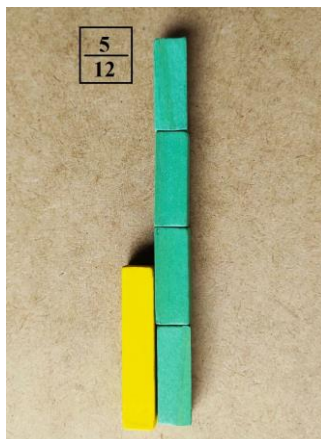


Figura 13 – Divisão de frações

Fonte: Elaborado pelas autoras

Com isso ficou fácil identificar a fração resultante desta divisão, que é $\frac{5}{12}$, no qual a barra amarela, que era o denominador da segunda fração inicial agora é o numerador da fração resultante e a barra verde-claro que representava o denominador da primeira fração inicial, agora é denominador da fração resultante.

5. Concluindo...

As Barras Cuisenaire, criadas por Georges Cuisenaire em 1950, chega ao Brasil na década de 1960 com o advento da Matemática Moderna. Considerado uma inovação para a época, continua sendo utilizado e indicado para a construção do número e das operações.

No caso do ensino das frações, proporciona o trabalho com o significado de medida para além da interpretação mais difundida no ensino fundamental que é a parte-todo. Os estudos coordenados pelo pesquisador Arthur Powell tem por pressuposto que a ontologia das frações, ou seja, o significado mais primitivo seria a ideia de medida e que se os professores iniciassem o conteúdo dessa forma, isso seria mais efetivo.

Em relação às operações de adição e subtração de frações com denominadores iguais ou diferentes há mais estudos que abordam esse problema e trazem avanços na compreensão. Para multiplicar e dividir com o material Cuisenaire encontramos somente trabalhos da década de 1960 e precisamos avançar nesse compreensão.

REFERÊNCIAS



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

ABREU, D. H. M; SANTOS, M. J. C; RODRIGUES, R. N. B. Uma experiência com o uso da Escala Cuisenaire como recurso pedagógico para aprender as quatro operações básicas de matemática. In: SANTOS, Maria José Costa dos; VASCONCELOS, Francisco Herbert Lima; LIMA, Ivoneide Pinheiro de (orgs.). Tecendo redes de experiências cognitivas: reflexões entre a teoria e a prática. Campinas: Editora Pontes, 2018. p. 282-298.

AMARAL, C. A. N; SOUZA, M. A. V. F; POWELL, A B. Fração à moda antiga: Barras de Cuisenaire e as frações. Vitória: Edifes, 2021.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acessado em agosto de 2021.

MÁRQUEZ, A. D. Didática das matemáticas elementares: o ensino da matemática pelo método dos números em côr ou método Cuisenaire. Rio de Janeiro: Distribuidora de livros escolares Ltda, 1967.

NOVAES, B. W. D; NIÉRRRI, A M. A descoberta das frações equivalentes e o material Cuisenaire. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2020, evento virtual. História da Educação Matemática: Panoramas curriculares e circulação de conhecimento. 2020, p. 1-5.

NOVAES, B. W. D; TORTOLA, E; VERTUAN, R. E. A “LEITURA” DO SENTIDO DAS FRAÇÕES: Manifestações de professores dos quintos e sextos anos em atividades desenvolvidas no Grupo da Segunda. Revista de História da Educação Matemática HISTEMAT, HISTEMAT, SBHMat, v.7, p. xx-xx, 2021. Disponível em: <<http://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/415/318>>. Acesso em: 17 ago. 2022.

OLIVEIRA, M. C. A. Referências para ensinar Matemática Moderna no primário: o material Cuisenaire e a sistematização de saberes. Educação, Porto Alegre, v. 42, n. 2, p. 257-263, maio-ago. 2019. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/204887/Refer%c3%aancias%20para%20ensinar%20Matem%c3%a1tica%20Moderna%20no%20prim%c3%a1rio.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 17 ago. 2022.



TEORIA DOS JOGOS E O EQUILÍBRIO DE NASH NO PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM

Marcos Alexandre Auler Oechsler
UTFPR-Toledo
marcoscolorado10@hotmail.com

Dione Ines Christ Milani
UTFPR-Toledo

Resumo

A Teoria dos Jogos revolucionou a economia e a forma que era tratada, hoje é amplamente utilizada em muitas áreas. Nessa mesma linha, o processo de ensino-aprendizagem sofre constantes mudanças, sempre em busca de uma estratégia que melhor se encaixe e que gere maior aprendizagem. Esse estudo visa relacionar a Teoria dos Jogos com o processo de ensino-aprendizagem, a fim de encontrar uma solução ideal e que gere maior aprendizagem possível. Para isso, um grupo de alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 3 dos cursos de Engenharia Civil, Engenharia da Computação e Engenharia Eletrônica, serão consultados para obter as respostas que serão usados como dados de entrada da tabela de Teoria dos Jogos. Espera-se encontrar uma relação entre a forma de estudo e o desempenho, e assim poder estabelecer um cenário ideal para se obter o melhor desempenho possível.

Palavras-chave: Educação. Economia. Cálculo Diferencial e Integral.

1 Introdução

Durante nosso crescimento, muitas vezes nos deparamos com algum tipo de jogo, pode ser uma brincadeira de infância ou alguma modalidade mais elaborada como o xadrez, até mesmo depois de adultos, vários exemplos de jogos despertam nossa paixão. Se observarmos a vida como um jogo e pensarmos que em nosso dia a dia estamos expostos a diversas situações de conflitos, nós podemos ser considerados jogadores.

A Teoria dos Jogos é um conceito matemático que foi criado para modelar esses fenômenos, observados entre dois ou mais jogadores que interagem entre si, sejam eles da mesma equipe ou não. Explicada por Câmara (2011) essa teoria posiciona os jogadores da melhor maneira possível para que se consiga o melhor resultado desejado e tem como finalidade levar a uma reflexão e entendimento lógico para tomar a decisão, elaborando uma estratégia para isso. Podemos utiliza-la para diversas situações presentes em nossa vida, como por exemplo qual filme um casal verá no cinema ou o famoso caso do Dilema do



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

Prisioneiro que veremos no andamento do trabalho. Na Teoria dos Jogos, para uma situação de jogo é preciso alguns elementos básicos, primeiramente é preciso um conjunto finito de jogadores, um conjunto de estratégias de cada jogador, um grupo com os resultados gerados após a interação dessas estratégias e por último, funções que atribuem os resultados para certa situação do jogo, que podemos chamar de *payoff* (Ganhos).

Ao observar resultados dos cursos que envolvam matérias de Cálculo, podemos ver que há uma grande dificuldade para que os alunos consigam absorver o conteúdo para obter os melhores resultados possíveis.

Vamos analisar de uma maneira lógica, uma estratégia para que o aprendizado do aluno seja potencializado, usando a Teoria dos Jogos. Em uma sala de aula existem interações entre os alunos, observando o comportamento desses alunos como jogadores de diferentes características, por meio da Teoria dos Jogos, é possível descobrir qual é a melhor estratégia para o aluno obter melhores resultados.

Essa pesquisa tem natureza aplicada visando uma compreensão de conhecimentos praticados em uma situação real de nosso dia-a-dia, pode ser classificada como uma pesquisa explicativa, pois tem como propósito identificar fatores que determinam ou contribuem para ocorrência de um fenômeno no nosso caso chamado de *payoff*. É um estudo de caso de abordagem quantitativa, pois precisamos traduzir os comportamentos dos alunos em dados, diferenciando seus pensamentos em diferentes estratégias.

Esse trabalho pretende ser uma contribuição para alunos e professores, ajudando a refletir sobre a melhor conduta para se adotar em sala de aula, ajudando o professor a elaborar uma aula com estratégias que contribuam no desempenho acadêmico e contribuir no avanço das pesquisas nessa área, visando a melhoria do processo de ensino-aprendizagem.

2 Estudo de caso

Essa pesquisa terá como finalidade aplicar a Teoria dos Jogos em uma situação de sala de aula, isso classifica o trabalho como de natureza aplicada, onde tem como objetivo identificar os principais fatores que determinam ou contribuem para ocorrência de um *payoff*, que é no mundo dos negócios chamado de lucro, onde no nosso caso será um melhor



resultado para os alunos. Ele busca entender tal situação após uma coleta de dados quantitativos e uma interpretação palpável dessas informações.

Para chegarmos ao nosso propósito, precisamos de dados reais, para isso, será feito um questionário, visando entender os principais fatores que comprometem o desempenho de um aluno de Cálculo do ensino superior. Esse questionário irá buscar por meio de perguntas, que estão no Apêndice, observar padrões entre esses alunos e com isso traçar perfis com diferentes estratégias que habitualmente são usadas por estudantes nessa época de suas vidas. Serão cinco perguntas, nas quais serão abordados os principais fatores que acreditamos influenciar no resultado dos alunos, cada pergunta será respondida de um peso de 0 a 10 pontos, para que com isso seja possível organizar essas estratégias em grupos para um melhor tratamento dos dados e com isso uma modelagem melhor do problema.

Por ser uma pesquisa que envolve seres humanos, esse questionário deve primeiramente ser aprovado pelo CEP da UTFPR para que possamos dar continuidade a pesquisa. Após esse questionário ser aprovado, será feita a pesquisa com alunos de Cálculo III, dos cursos de Engenharia Civil, Engenharia Eletrônica e Engenharia da Computação da UTFPR, com a coleta desses dados devemos entender e tratar essas informações. Com esses dados em nossas mãos iremos dar andamento na pesquisa e começar a modelar a situação matematicamente.

2.1 O que caracteriza um jogo

Podemos definir a Teoria dos Jogos como modelos matemáticos que estudam a tomada de decisões de dois ou mais jogadores em uma situação de conflito. De acordo com (SARTINI, GARBUGIO, *et al.*, 2004) para ter uma situação de jogo precisamos de alguns elementos básicos:

- Um conjunto finito de jogadores, representado por:

$$G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$$

- Cada jogador $g_i \in G$ possui um conjunto finito de estratégias puras representadas por:

$$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{imi}\} \text{ tal que } (m_i \geq 2)$$

- O conjunto de todos os perfis de estratégia pura é dado pelo produto cartesiano:

$$S = \prod_{i=1}^n S_i = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$$

- S é denominado espaço de estratégia pura do jogo, para cada jogador g_i , temos uma função *payoff* que associa o ganho $u_i(s)$ do jogador g_i a cada estratégia pura $s \in S$.

$$u_i: S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \mapsto u_i(s)$$

		SB					
		SB ₁	SB ₂	.	.	.	SB _j
SA	SA ₁	p_{11}	p_{12}	.	.	.	p_{1j}
	SA ₂	p_{21}	p_{22}

	SA _i	p_{i1}	p_{i2}	.	.	.	p_{ij}

Quadro 1: Matriz P

Os jogos estudados pela Teoria dos Jogos são classificados em diferentes categorias, sendo:

- Jogos de Soma Zero: Representa que o ganho de um jogador representa a perda do outro, ou seja, sempre haverá um vencedor e um perdedor.
- Jogos de Soma não Zero: Não há um vencedor e um perdedor.
- Jogos cooperativos: Dinâmicas de grupo com objetivo de despertar a consciência e cooperação entre os jogadores.
- Jogos não cooperativos: Ao contrário dos cooperativos, as decisões dos jogadores são pensadas somente no melhor para si.



2.2 A solução de um jogo

Observando um jogo, percebemos que os jogadores tem sempre uma opção que aparenta ser a melhor, se assumirmos que todos são seres racionais, devemos esperar que escolham sempre o melhor para eles.

Para fazer a análise de perfis de estratégia, apenas a estratégia do jogador analisado g_i estará variando, enquanto as dos demais jogadores permanecerão fixas, é como olhar o jogo pelo ponto de vista de apenas um jogador.

Seja $s_{-i} = (s_{1j_1}, \dots, s_{(i-1)j_{i-1}}, s_{(i+1)j_{i+1}}, \dots, s_{nj_n}) \in S_{-i} = S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$

uma escolha de estratégia para todos os jogadores, menos o jogador g_i , desta maneira temos que:

$$s = (s_{ij_i}, s_{-i}) \in S.$$

2.2.1 Estratégia Pura Estritamente Dominada

Dizemos que uma estratégia pura $s_{ik} \in S_i$ de um jogador $g_i \in G$ é estritamente dominada pela estratégia $s'_{ik} \in S_i$ se $u_i(s'_{ik}, s_{-i}) > u_i(s_{ik}, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$.

2.2.2 Estratégia Pura Fracamente Dominada

Dizemos que uma estratégia pura $s_{ik} \in S_i$ de um jogador $g_i \in G$ é fracamente dominada pela estratégia $s'_{ik} \in S_i$ se $u_i(s'_{ik}, s_{-i}) \geq u_i(s_{ik}, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$.

Dessa forma, podemos eliminar as estratégias que são estritamente dominadas, vejamos no exemplo a seguir, onde (SARTINI, GARBUGIO, *et al.*, 2004) deixa mais clara essa ideia.

Exemplo 1: Considere o jogo determinado pela matriz de *payoffs* abaixo.

		g₂			
		S21	S22	S23	S24
g₁	S11	(5, 2)	(2, 6)	(1, 4)	(0, 4)
	S12	(0, 0)	(3, 2)	(2, 1)	(1, 1)
	S13	(7, 0)	(2, 2)	(1, 1)	(5, 1)
	S14	(9, 5)	(1, 3)	(0, 2)	(4, 8)

Quadro 2: Matriz *Payoff* Exemplo 1

Neste jogo, olhando pela visão do jogador *g₂*, a estratégia *s₂₁* é estritamente dominada pela estratégia *s₂₄*, assim, a primeira coluna da matriz pode ser eliminada.

		g₂		
		S22	S23	S24
g₁	S11	(2, 6)	(1, 4)	(0, 4)
	S12	(3, 2)	(2, 1)	(1, 1)
	S13	(2, 2)	(1, 1)	(5, 1)
	S14	(1, 3)	(0, 2)	(4, 8)

Quadro 3: Matriz *Payoff* Exemplo 1 reduzida.

Agora já com a matriz reduzida, pelo olhar do jogador *g₁*, as estratégias *s₁₁* e *s₁₄* são estritamente dominadas por *s₁₂* e *s₁₃* respectivamente. Logo, as linhas 1 e 4 podem ser eliminadas. Olhando pela visão do jogador *g₂*, a estratégia *s₂₃* é estritamente dominada por *s₂₂*, portanto podemos eliminar a coluna 2. Então obtemos uma matriz 2 x 2.

		g₂	
		S22	S24
g₁	S12	(3, 2)	(1, 1)
	S13	(2, 2)	(5, 1)

Quadro 4: Matriz *Payoff* Exemplo 1 reduzida.

A estratégia s_{24} na visão do jogador g_2 é estritamente dominada pela estratégia s_{22} e na visão do jogador g_1 a estratégia s_{13} é estritamente dominada por s_{12} . Com isso vemos que o resultado desse jogo em estratégias puras é (3, 2) isto é, o jogador g_1 escolhe a estratégia s_{12} e o jogador g_2 escolhe a estratégia s_{22} .

		g_2	
		s_{12}	s_{22}
g_1	s_{12}	(3, 2)	

Quadro 5: Matriz *Payoff* Exemplo 1 reduzida.

No exemplo anterior, a técnica de dominância estrita iterada nos forneceu um único perfil de estratégia, porém pode ocorrer de fornecer vários perfis como solução e até mesmo todo nosso espaço de estratégias em um jogo onde não existem estratégias estritamente dominadas.

2.2.3 Equilíbrio de Nash

Em um Equilíbrio de Nash é escolhida a melhor opção possível dentre todas as estratégias disponíveis para ambos os jogadores. Dizemos que uma combinação de estratégias constitui um Equilíbrio de Nash quando cada estratégia é a melhor resposta possível às estratégias dos demais jogadores. Sendo isso na verdade para todos os jogadores (FIANI, 2015), ou seja, nenhum dos jogadores se arrepende da sua decisão.

Dizemos que um perfil de estratégia $s^* = (s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \in S$ é um equilíbrio de Nash se:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij_i}, s_{-i}^*) \forall i = 1, \dots, n \text{ e } \forall j_i = 1, \dots, m_i, \text{ com } m_i \geq 2.$$

No jogo do Exemplo 1 temos um Equilíbrio de Nash, pois a melhor perfil de estratégia é o mesmo da visão de ambos os jogadores, logo nenhum deles se arrependerá de sua decisão.



Existem jogos que não possuem equilíbrios de Nash em estratégias puras. Caso isso aconteça, uma alternativa é levar o jogo a um ponto de vista probabilístico, isto é, ao invés de apenas escolher um perfil de estratégias puras, o jogador escolhe um perfil com uma distribuição de probabilidade com suas estratégias puras e isso é chamado de estratégias mistas.

2.3 O dilema do prisioneiro

O dilema do prisioneiro é possivelmente o exemplo mais famoso da Teoria dos Jogos, ele foi formulado por Albert W. Tucker no ano de 1950 na Universidade de Stanford.

Temos a seguinte situação: Zé Pequeno e Orelha são dois criminosos suspeitos de um assassinato e são detidos pela polícia após um assalto, porém para prendê-los pelo assassinato é preciso de uma confissão de pelo menos um dos meliantes. As autoridades decidem colocá-los em salas separadas na delegacia para questioná-los. Para cada um dos suspeitos é oferecido um acordo que reduz a sentença do seu crime se confessar. Assim temos as seguintes possibilidades:

- Caso nenhum dos criminosos confessar, ambos serão presos por 1 ano apenas pelo roubo.
- Se ambos confessarem, terão uma pena de 5 anos.
- Se apenas um confessar e o outro negar, quem confessou será liberado e o outro será condenado a 10 anos de prisão.

Vamos representar o jogo da seguinte maneira:

$$G = \{Zé, Orelha\}$$

$$S_{Zé} = \{Confessar, Negar\}$$

$$S_{Orelha} = \{Confessar, Negar\}$$

$$S = \{(Confessar, Confessar), (Confessar, Negar), (Negar, Confessar), (Negar, Negar)\}$$

Assim temos as funções utilidade que representam os *payoffs*:

$$u_{Zé}: S \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } u_{Orelha}: S \rightarrow \mathbb{R}$$

Para representar os ganhos de Zé Pequeno temos:

$$u_{Zé}(Confessar, Confessar) = -5, \quad u_{Zé}(Confessar, Negar) = 0$$

$$u_{Zé}(Negar, Confessar) = -10, \quad u_{Zé}(Negar, Negar) = 1$$

Analogamente para representar os ganhos de Orelha temos:

$$u_{Orelha}(Confessar, Confessar) = -5, \quad u_{Orelha}(Confessar, Negar) = -10$$

$$u_{Orelha}(Negar, Confessar) = 0, \quad u_{Orelha}(Negar, Negar) = 1$$

É comum na Teoria dos Jogos representar os *payoffs* dos jogadores através de uma matriz, da seguinte maneira:

		ORELHA	
		CONFESSAR	NEGAR
ZÉ PEQUENO	CONFESSAR	(-5, -5)	(0, -10)
	NEGAR	(-10, 0)	(1, 1)

Quadro 6: Matriz *Payoff* Dilema do prisioneiro.

Podemos identificar pelo ponto de vista de Zé Pequeno que a estratégia de confessar é estritamente dominante a estratégia de negar, logo podemos eliminar a linha 2, analogamente pelo ponto de vista do Orelha observamos que confessar é estritamente dominante a estratégia de negar, podendo eliminar também a coluna 2.

		ORELHA
		CONFESSAR
ZÉ PEQUENO	CONFESSAR	(-5, -5)

Quadro 7: Matriz *Payoff* Reduzida Dilema do prisioneiro.

Portanto o perfil de estratégia $s^* = (Confessar, Confessar)$ é um equilíbrio de Nash em estratégia pura, pelo fato de não haver arrependimento, pois quem mudar de estratégia irá se dar muito mal.



3 Discussão

Após a coleta de dados, eles serão modelados e é esperado que seja encontrado por meio da Teoria dos Jogos, a melhor estratégia, ou seja, o principal procedimento que leva aos alunos ter o resultado mais favorável possível. Com esse resultado em mãos, será feita uma reflexão de como o papel do professor pode incentivar os alunos a optarem pela melhor estratégia e assim contribuir para a evolução da educação em nosso país.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 3 possui um alto índice de reprovação, ao conseguirmos encontrar a situação ideal através da Teoria dos Jogos, estaremos contribuindo para a melhoria do processo de ensino aprendizagem, podendo estabelecer métodos mais eficazes. Caso a pesquisa dê bons resultados, podemos expandir essa ideia para as demais disciplinas e assim melhorar o processo de ensino-aprendizagem.

Com esses resultados podemos abrir novas discussões sobre o papel do aluno e do professor, trabalho em equipe ou individual, estudar sozinho ou em sala de aula, etc. São infinitos os questionamentos que com uma amostra boa de alunos podemos responder usando a matemática.

4 Considerações Finais

Concluiremos esse trabalho observando quais colaborações o uso da Teoria dos Jogos pode trazer para um ensino mais inovador e preocupado com melhores resultados. Assim provocando e encorajando uma maior quantidade de pesquisas nessa área, que tenta entender situações reais e palpáveis para otimizar o resultado de diversas situações presentes no mundo.



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

REFERÊNCIAS

CÂMARA, Samuel F. **Teoria dos Jogos**, 2011.

FIANI, Ronaldo. **Teoria dos Jogos**. 3^a. ed.

SARTINI, Brígida et al. **Uma Introdução a Teoria dos Jogos**, Bahia, 25 a 29 Outubro 2004.



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

APÊNDICE

Questionário para pesquisa com os alunos de Cálculo:

Questão 1: Numa escala de 0 a 10, onde 0 significa maior aprendizagem em estudos individuais e 10 maior aprendizagem em estudos em grupos, qual o nível você melhor se enquadra.

Questão 2: De uma escala de 0 a 10, onde 0 é fácil e 10 é difícil, que nível em sua opinião representa sua dificuldade da matéria de Cálculo 3?

Questão 3: De uma escala de 0 a 10, onde 0 é pouco focado e 10 é totalmente focado, o quanto você é focado em aulas presenciais, síncronas e assíncronas?

Questão 4: De uma escala de 0 a 10, onde 0 é pouco e 10 é muito, quanto você estuda em horários extracurriculares? (Leituras sobre o tema, resolução de listas, revisão do conteúdo etc.)

Questão 5: De 0 a 10 qual foi seu resultado na matéria de cálculo.



EQUAÇÃO DO CALOR UNIDIMENSIONAL: RESOLUÇÃO ANALÍTICA E COMPUTACIONAL

Thais Paula Prunzel
Universidade Tecnológica Federal do
Paraná
thais_prunzel_2010@hotmail.com

Jocelaine Cargnelutti
Universidade Tecnológica Federal do
Paraná

Vanderlei Galina
Universidade Tecnológica Federal do
Paraná

Resumo

Neste trabalho, objetivou-se a realização de um estudo acerca de um problema de fluxo de calor em uma haste fina, aplicando métodos de resolução analítica e numérica para obter a solução da equação diferencial parcial (EDP) que governa o problema de valor de contorno (PVC) analisado e, assim, realizar comparações entre os resultados encontrados. O PVC em questão trata da condução de calor em uma haste fina aquecida com uma temperatura inicial por todo o seu comprimento cujas as extremidades são mantidas à temperatura zero. Este problema é descrito por uma EDP parabólica de segunda ordem linear denominada equação do calor unidimensional, que determina a variação de temperatura em um meio com o passar do tempo. Para determinar a solução analítica do PVC utilizou-se o método da separação de variáveis, quanto à solução numérica, utilizou-se o método das diferenças finitas (MDF), substituindo-se as derivadas da equação original por fórmulas de diferenças finitas, gerando um sistema de equações algébricas. Frente as soluções obtidas, verificou-se a eficiência do método numérico ao comparar os resultados analíticos com os numéricos e constatar um baixo erro relativo entre eles.

Palavras-chave: Problema de valor de contorno. Equação diferencial parcial. Equação do calor. Variação de temperatura. Método das diferenças finitas.

1 Introdução

Neste trabalho será realizado um estudo sobre o fluxo de calor em uma haste fina, com o intuito de obter a modelagem matemática que representa o problema. Este problema que envolve a condução de calor em um sólido é descrito pela Equação do Calor unidimensional, a qual iremos obter a solução analítica pelo método de separação de variáveis e a numérica por meio do método das diferenças finitas (MDF). Para que o objetivo seja alcançado, primeiramente será feita uma revisão bibliográfica sobre as equações diferenciais parciais, problemas de valor de contorno e os métodos de resolução analítico e numérico.

As equações diferenciais podem ser definidas como equações que contém derivadas e podem ser classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade. Em particular, quanto ao tipo, existem as equações diferenciais parciais (EDPs) que envolvem derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes com relação a duas ou mais variáveis independentes. Nesse sentido, observa-se uma vasta variedade de aplicações em diversas áreas de conhecimento, como em ciências, engenharia, economia e até mesmo em psicologia, onde se deseja modelar o comportamento de algum fenômeno em termos matemáticos (ZILL; CULLEN, 2007) [9].

A modelagem de sistemas por meio de equações diferenciais é uma ferramenta poderosa que apresenta aplicação em situações como o aumento ou diminuição de populações, a propagação de epidemias, a competição de espécies, a dissipação de calor em objetos sólidos, etc. A partir dos modelos matemáticos é possível representar tanto sistemas simples quanto sistemas mais complexos, fornecendo assim uma descrição aproximada e simplificada do processo real (THOMAS, 2013) [7].

O estudo significativo sobre os modelos matemáticos, as equações que os descrevem e suas soluções são indispensáveis para compreender os procedimentos de solução de problemas reais. A solução é necessária para que se possa fazer previsões sobre como se comporta o processo que a equação diferencial se propõem a modelar (BOYCE; DIPRIMA, 2006) [1].

Por sua vez, as equações diferenciais parciais são de extrema importância para resolução de problemas mais amplos, especialmente fenômenos que envolvem a condução de calor. A equação diferencial que governa a condução de calor em sólidos é denominada Equação de Calor. No entanto, para determinar o fluxo de calor em uma barra, é preciso solucionar essa equação diferencial parcial sujeita à condições de contorno e à uma condição inicial (BOYCE; DIPRIMA, 2006) [1].

Contudo, a resolução de uma equação diferencial parcial pode ser uma tarefa difícil. Por conta das condições de contorno impostas ao problema, a obtenção de uma solução exata por algum método analítico existente, torna-se muito complicada ou até mesmo impossível. Nestes casos, é possível encontrar uma solução aproximada obtida através da utilização de métodos numéricos (VIANA, 2018) [8].

Existem nos dias atuais, inúmeros métodos numéricos utilizados para solução de problemas, entre eles, destaca-se o Método das Diferenças Finitas. Nesse método, é efetuado o processo de discretização do domínio considerado e a EDP é então transformada em um sistema de equações algébricas, substituindo as derivadas por diferenças finitas. O método numérico das diferenças finitas é facilmente executado em computadores para sistemas em que utiliza-se a discretização por uma malha uniforme, assim, são utilizados softwares como o Scilab para facilitar a resolução (CHAPRA; CANALE, 2008) [4].

Diante do que foi apresentado, neste trabalho pretende-se modelar o problema da propagação do calor unidimensional em uma haste fina, obter a solução analítica e comparar com a solução numérica que será obtida pelo método das diferenças finitas.

2 Estudo de Caso

2.1 Equação do calor

O estudo dos fenômenos de transferência de calor compreende uma das áreas fundamentais da engenharia e demais ciências exatas, por consequência dos inúmeros processos e aplicações que utilizam energia em trânsito. Esses problemas que envolvem a condução de calor em um sólido são descritos pela Equação do Calor.

De acordo com Çengel e Ghajar (2012) [3], o calor é a energia térmica que pode ser transferida de um sistema para outro devido a diferença de temperatura entre eles. Logo, sempre que existir uma diferença de temperatura em um meio ou entre meios, haverá, necessariamente, transferência de calor.

De forma geral, a condução do calor em um meio é tridimensional, dependente do tempo e da temperatura do meio. Desse modo, os problemas de transferência de calor podem ser

classificados como permanentes ou transientes. O termo permanente implica que a temperatura não varia em nenhum ponto no meio ao longo do tempo, enquanto transiente implica variação com dependência do tempo (ÇENGEL; GHAJAR, 2012) [3].

Os problemas de transferência de calor podem também ser classificados como unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais. No caso mais geral, a condução de calor em um meio é tridimensional, ou seja, quando a temperatura varia ao longo das três dimensões espaciais descritas pelas coordenadas x , y e z . Quando a temperatura em um meio varia em duas direções e a terceira é desprezível, o problema é considerado bidimensional. No caso de a temperatura no meio variar em uma única direção e o calor for transferido na mesma direção, sendo desprezível a condução nas outras duas direções, então o problema de transferência de calor será considerado unidimensional.

Para fins deste trabalho, realiza-se um estudo acerca da Equação do Calor unidimensional, considerando que esta é a equação diferencial que governa a condução de calor em sólidos. Segundo Incropera et al. [5], essa equação determina o campo de temperaturas em um meio resultante das condições impostas em suas fronteiras, ou seja, representa a variação da temperatura no meio.

2.2 Características do problema

A Equação do Calor é uma equação clássica da física matemática associada à teoria do fluxo de calor, isto é, calor transferido por condução em um meio. Ela pode ser aplicada desde os casos mais simples, como para determinar a variação de temperatura em uma haste fina, até a condução transiente e multidimensional em geometrias complexas.

A equação do calor unidimensional envolve duas variáveis independentes x e t e uma variável dependente $u(x, t)$, sendo representada da forma,

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, k > 0. \quad (1)$$

Deste modo, a equação do calor é uma equação diferencial parcial parabólica de segunda ordem linear, em que a variável x representa uma dimensão espacial, t representa o tempo e a função $u(x, t)$ é a temperatura. Além disso, k é uma constante positiva chamada difusividade térmica, que depende apenas do material de que é feita a barra.

Para determinar a distribuição de temperatura em um meio, é necessário resolver a equação do calor de forma apropriada. Tal solução depende das condições físicas existentes nas fronteiras do meio, e, se a situação variar com o tempo, a solução também depende das condições existentes no meio em algum instante inicial (INCROPERA et al., 2008) [5].

Desta forma, conforme Zill e Cullen (2009) [10], ao considerar uma haste fina de comprimento L com uma temperatura inicial $f(x)$ por toda a haste e cujas extremidades sejam mantidas à temperatura zero para todo o tempo $t > 0$, o problema da condução do calor consiste em determinar a temperatura $u(x, t)$ na haste a partir do problema de valor de contorno dado por

$$\begin{cases} k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L. \end{cases} \quad (2)$$

3 Resultados e Discussão

3.1 Resolução analítica

O problema fundamental de condução de calor é encontrar uma solução $u(x, t)$ que satisfaz a equação diferencial (1) para $0 < x < L$ e $t > 0$, sujeita às condições inicial e de contorno as quais a haste fina está submetida. Desse modo, para obter a solução analítica do problema de valor de contorno (2) será utilizado o método da separação de variáveis, que consiste em usar a separação de variáveis para determinar uma solução particular do problema escrita como um produto entre uma função x e uma função t ,

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (3)$$

Ao verificar que a variável u só aparece na primeira potência em toda equação, tem-se que o problema de condução de calor é linear. Além disso, a EDP e as condições de contorno são, também, homogêneas. Isso sugere que é possível abordar o problema buscando soluções da equação diferencial e das condições de contorno, fazendo depois uma superposição para satisfazer a condição inicial (BOYCE; DIPRIMA, 2006) [1].

Desta forma, Zill e Cullen (2009) [10] apontam que uma solução do problema de condução de calor (2) é indicada pela série infinita

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx \right) e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x. \quad (4)$$

Para o caso especial no qual a haste fina de comprimento $L = \pi$ com temperatura inicial $u(x, 0) = 100$ por toda a haste e difusividade térmica $k = 1$, cujas as extremidades sejam mantidas à temperatura zero para todo o tempo $t > 0$, tem-se que a temperatura $u(x, t)$ na haste, com $0 < x < \pi$, é determinada a partir do PVC dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \\ u(0, t) = 0 \\ u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = 100. \end{cases} \quad (5)$$

Portanto, conforme a solução geral apresentada em (4), a solução analítica $u(x, t)$ do PVC (5) é indicada pela série infinita

$$u(x, t) = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n} \right] e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx). \quad (6)$$

3.2 Resolução numérica

A solução numérica da Equação do Calor será obtida por meio do Método das Diferenças Finitas, cuja ideia básica consiste em aproximar as derivadas que aparecem na equação original por fórmulas de diferenças finitas. Além do mais, neste método numérico, o domínio contínuo da equação é substituído por uma malha de pontos, por meio de um processo de discretização.

Para obter a solução numérica do PVC do calor (2), em vez de trabalhar com a região semi-infinita no plano xt definida pelas igualdades $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$, será utilizada a região

retangular definida por $0 \leq x \leq L$ e $0 \leq t \leq T$, onde T é algum valor específico de tempo. Sobre essa região, posiciona-se uma malha retangular constituída por retas verticais espaçadas por h_x unidades e retas horizontais afastadas h_t unidades entre si.

Desta forma, ao escolher quaisquer dois inteiros positivos n e m , obtém-se que,

$$h_x = \frac{L}{n} \text{ e } h_t = \frac{T}{m},$$

então as retas verticais e horizontais da malha são definidas por

$$x_i = ih_x, i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } t_j = jh_t, j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Inicialmente, objetiva-se obter a solução numérica do PVC (5), desta forma, considera-se uma haste fina de comprimento $L = \pi$ com temperatura inicial $u(x, 0) = 100$ por toda a haste e difusividade térmica $k = 1$, cujas as extremidades sejam mantidas à temperatura zero para todo o tempo $0 < t < 6$, assim a temperatura $u(x, t)$ na haste, com $0 < x < \pi$, é determinada a partir do PVC,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \\ u(0, t) = 0 \\ u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = 100. \end{cases} \quad (7)$$

A primeira etapa da aplicação do MDF consiste em definir o domínio discreto onde a solução será buscada, em particular, para o caso apresentado anteriormente, tem-se uma região retangular definida por $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq t \leq 6$. Para discretizar o domínio, a princípio divide-se o intervalo $[0, \pi]$ em $n = 6$ subintervalos igualmente espaçados, em que cada subintervalo têm comprimento $h_x = \frac{\pi - 0}{6} = \frac{\pi}{6}$. A Figura 1 apresenta a malha unidimensional para quando $n = 6$.

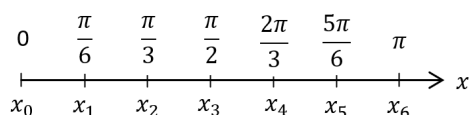


Figura 1: Malha unidimensional quando $n = 6$
 Fonte: Os autores (2021).

Para definir o espaçamento h_t , adota-se a relação

$$\lambda = \frac{kh_t}{h_x^2}, \quad (8)$$

em que $k > 0$ é a constante de difusividade térmica. Esta relação vem da discretização da equação do calor pelo MDF. Como condição de estabilidade do método numérico, é necessário que $\lambda \leq \frac{1}{2}$, caso contrário o método é considerado instável, isto é, quando os erros de arredondamento ou qualquer outro erro crescem muito rapidamente com a realização dos cálculos [10].

Sendo assim, admitindo $\lambda = \frac{1}{4}$ obtém-se que

$$h_t = \frac{\lambda h_x^2}{k} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{1} = \frac{\pi^2}{144} \approx 0,068539. \quad (9)$$

Portanto, sobre a região definida por $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq t \leq 6$, posiciona-se uma malha retangular formada por retas verticais espaçadas por $h_x = \frac{\pi}{6}$ unidades e retas horizontais afastadas $h_t = \frac{\pi^2}{144}$ unidades entre si, ou seja, as retas verticais e horizontais são definidas por,

$$x_i = \frac{\pi}{6}i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 6$$

$$t_j = \frac{\pi^2}{144}j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, 88.$$

Para aproximar a solução $u(x, t)$ da equação do calor unidimensional (1), devemos substituir as derivadas por quocientes de diferenças. Em particular, requer aproximações para a derivada segunda na variável espacial e para derivada primeira na variável tempo. Deste modo, utiliza-se a aproximação por diferença central de segunda ordem na variável espacial, dada por,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h_x^2} [u(x + h_x, t) - 2u(x, t) + u(x - h_x, t)], \quad (10)$$

e, a aproximação por diferença progressiva de primeira ordem na variável tempo, expressa da forma,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{h_t} [u(x, t + h_t) - u(x, t)]. \quad (11)$$

Com isso, substituindo as aproximações (10) e (11) na EDP do calor (1), obtém-se a equação

$$\frac{k}{h_x^2} [u(x + h_x, t) - 2u(x, t) + u(x - h_x, t)] = \frac{1}{h_t} [u(x, t + h_t) - u(x, t)], \quad (12)$$

ou ainda, adotando as simplificações $u(x, t) = u_{ij}$, $u(x + h_x, t) = u_{i+1,j}$, $u(x - h_x, t) = u_{i-1,j}$ e $u(x, t + h_t) = u_{i,j+1}$, obtém-se a equação discretizada para cada i ,

$$\frac{kh_t}{h_x^2} [u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}] = u_{i,j+1} - u_{ij}, \quad (13)$$

a qual, considerando a relação $\lambda = \frac{kh_t}{h_x^2}$ e isolando o termo $u_{i,j+1}$, pode ser reescrita como,

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i+1,j} + (1 - 2\lambda)u_{ij} + \lambda u_{i-1,j}. \quad (14)$$

Essa equação pode ser escrita para todos os nós interiores da barra. Ela então fornece um meio explícito de calcular valores em cada nó para um instante futuro baseado nos valores atuais no nó e em seus vizinhos. Considerando $j = 0$ na expressão (14), obtém-se uma fórmula para as aproximações da temperatura u na primeira reta de tempo dada por,

$$u_{i,1} = 0, 25u_{i+1,0} + 0, 5u_{i,0} + 0, 25u_{i-1,0}. \quad (15)$$

Logo, adotando $i = 1, 2, 3, 4, 5$ na última equação (15), obtém-se, respectivamente,

$$u_{1,1} = 0, 25u_{2,0} + 0, 5u_{1,0} + 0, 25u_{0,0}$$

$$u_{2,1} = 0, 25u_{3,0} + 0, 5u_{2,0} + 0, 25u_{1,0}$$

$$u_{3,1} = 0, 25u_{4,0} + 0, 5u_{3,0} + 0, 25u_{2,0}$$

$$u_{4,1} = 0, 25u_{5,0} + 0, 5u_{4,0} + 0, 25u_{3,0}$$

$$u_{5,1} = 0, 25u_{6,0} + 0, 5u_{5,0} + 0, 25u_{4,0}.$$

A critério de conhecimento, para compreender a técnica das diferenças finitas, a equação $u_{2,1}$ apresentada acima, pode ser reescrita como,

$$u_{2,1} = 0,25u(x_3, t_0) + 0,5u(x_2, t_0) + 0,25u(x_1, t_0), \quad (16)$$

deste modo, como $x_i = \frac{\pi}{6}i$ e $t_j = \frac{\pi^2}{144}j$, tem-se $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$ e $t_0 = 0$. Portanto, a equação em (16) torna-se

$$u_{2,1} = 0,25u\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) + 0,5u\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) + 0,25u\left(\frac{\pi}{6}, 0\right). \quad (17)$$

A partir da condição inicial $u(x, 0) = 100$, a última equação torna-se

$$u_{2,1} = 0,25 \cdot 100 + 0,5 \cdot 100 + 0,25 \cdot 100 = 100$$

Sendo assim, tem-se que $u_{2,1} = 100$ é uma aproximação para a temperatura $u(x_2, t_1) = u\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi^2}{144}\right)$, cuja solução analítica é dada por,

$$u\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi^2}{144}\right) = 99,532213. \quad (18)$$

De maneira semelhante, é realizada a aproximação da temperatura u em cada ponto do domínio discretizado e, então realizam-se comparações entre a solução analítica e a numérica.

Devido as inúmeras etapas de manipulação de dados envolvidas nos processos de simulação numérica, é inevitável o surgimento de erros que interferem no resultado final. Em vista disso, a análise dos erros inerentes ao processo faz-se necessária com o propósito de validar o método utilizado (CUNHA, 2000)[2].

De acordo com Lopes e Ruggiero (1996)[6], o erro pode ser expresso como erro absoluto (EA), obtido pela diferença entre o valor exato (x) e o valor aproximado (\bar{x}), isto é, $EA = |x - \bar{x}|$. Contudo, por vezes o erro absoluto não é suficiente para descrever a precisão do cálculo, então utiliza-se o erro relativo (ER), que considera a ordem de grandeza dos números envolvidos e é definido por,

$$ER = \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|}. \quad (19)$$

Quanto à solução numérica, foi realizada a implementação computacional da equação (14) por meio de um código desenvolvido no software Scilab. O Scilab é um software livre de alto rendimento com linguagem de programação simples, que apresenta uma variedade de funções matemáticas e ferramentas que proporcionam a resolução de cálculos de certa complexidade.

Os valores resultantes da simulação numérica foram escritos em arquivo, para que fossem utilizados na análise gráfica. Os gráficos em 3D e em 2D foram construídos pelo software livre Gnuplot.

Deste modo, a Figura 2 ilustra a superfície gerada pela temperatura ao longo da barra com o passar do tempo quando $n = 6$ subintervalos.

Entretanto, verifica-se que para $n = 6$ a quantidade de subintervalos no eixo horizontal é insuficiente para se ter uma solução aproximada com boa precisão. Isso fica claro pela ocorrência de altos erros ao comparar a solução analítica e a numérica. Visualmente, a Figura 2 mostra

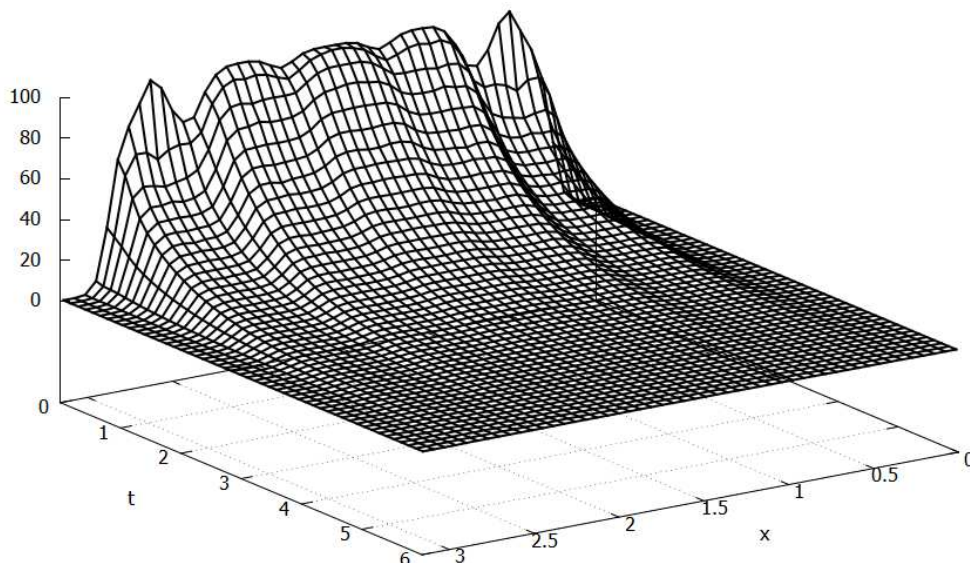


Figura 2: Temperatura $u(x, t)$ ao longo da barra no decorrer do tempo com $n = 6$
 Fonte: Os autores (2021).

as várias oscilações no gráfico. Para contornar este problema, deve-se aumentar o número de subintervalos no eixo horizontal, o que também acarreta em aumento no número de subintervalos no eixo vertical (tempo).

Assim, visando melhorar a solução apresentada anteriormente, o problema de valor de contorno (7) também foi resolvido para $n = 100$ subintervalos, assim, tem-se que $h_x = 0,031416$ e, admitindo $\lambda = 0,5$, tem-se que $h_t = 0,0004935$, ou seja, $m = 12159$ subintervalos no eixo t .

Desta forma, a Figura 3 apresenta o gráfico 3D da temperatura ao longo da barra com o passar do tempo quando $n = 100$. Como já era esperado, o aumento do número de nós da malha gera uma aproximação cada vez melhor, assim, se verifica com maior intensidade o princípio da condução do calor.

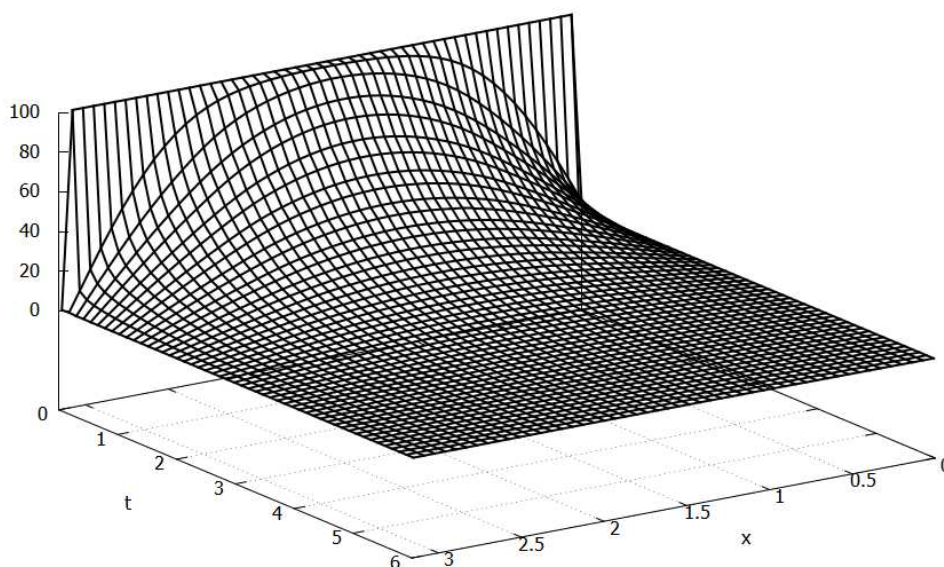


Figura 3: Temperatura $u(x, t)$ ao longo da barra no decorrer do tempo com $n = 100$
 Fonte: Os autores (2021).

Alternativamente, com o auxílio da aplicação de gráficos $2D$, traçamos a solução $u(x, t)$ como uma função de x para vários tempos fixos e como uma função de t para várias posições fixas na haste. O gráfico exposto na Figura 4 mostra a variação da temperatura no comprimento da barra para os tempos fixos de $t = 0, 1, t = 0,5, t = 1, t = 2$ e $t = 4$.

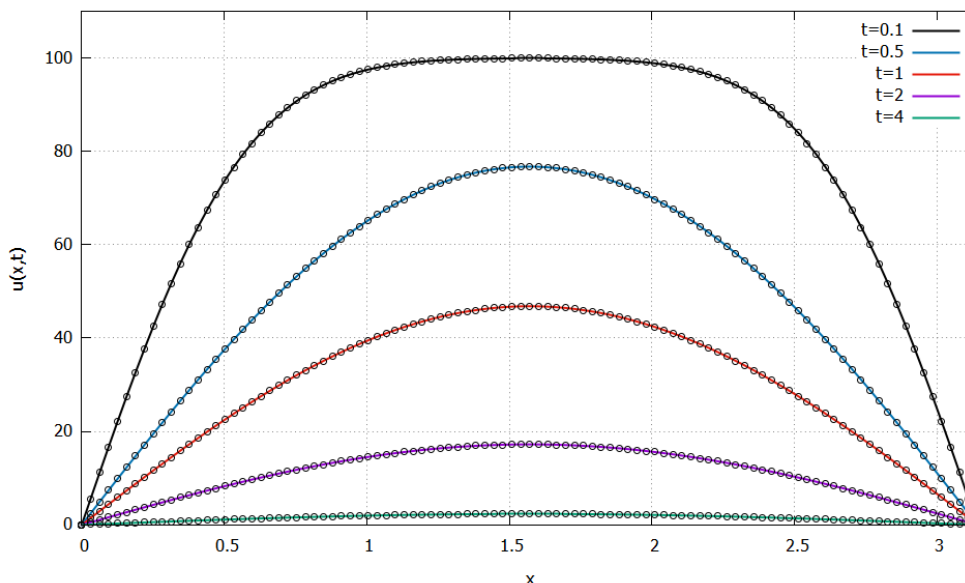


Figura 4: Variação da temperatura ao longo da barra com t fixo quando $n = 100$
 Fonte: Os autores (2021).

A excelente concordância das soluções analítica e numérica ilustrada na Figura 4 é confirmada pelo baixo erro relativo obtido. A Tabela 1 apresenta estes resultados para alguns instantes fixos do tempo.

Tabela 1: Erro relativo (ER) obtido para diferentes instantes de tempo, com $n = 100$

Instante de tempo	ER(%)
0,1	0,2858
0,5	0,0576
1,0	0,0499
2,0	0,0658
4,0	0,0987

Fonte: Os autores (2021).

Já a Figura 5, apresenta o gráfico da variação da temperatura no decorrer do tempo para os comprimentos fixos de $x = 0,3, x = 0,5, x = 1$ e $x = 1,5$.

Novamente tem-se uma excelente concordância das soluções analítica e numérica ilustrada na Figura 5, que é confirmada pelo baixo erro relativo obtido. A Tabela 2 apresenta estes resultados em algumas posições fixas na haste.

Comparando-se as soluções analítica e numérica, observa-se que o Método das Diferenças Finitas obteve excelente precisão na aproximação numérica da solução da equação do calor unidimensional. O método se mostra muito útil para obtenção da resolução de PVCs, principalmente onde não se tem uma solução analítica ou nos casos em que a solução analítica é difícil de se obter.

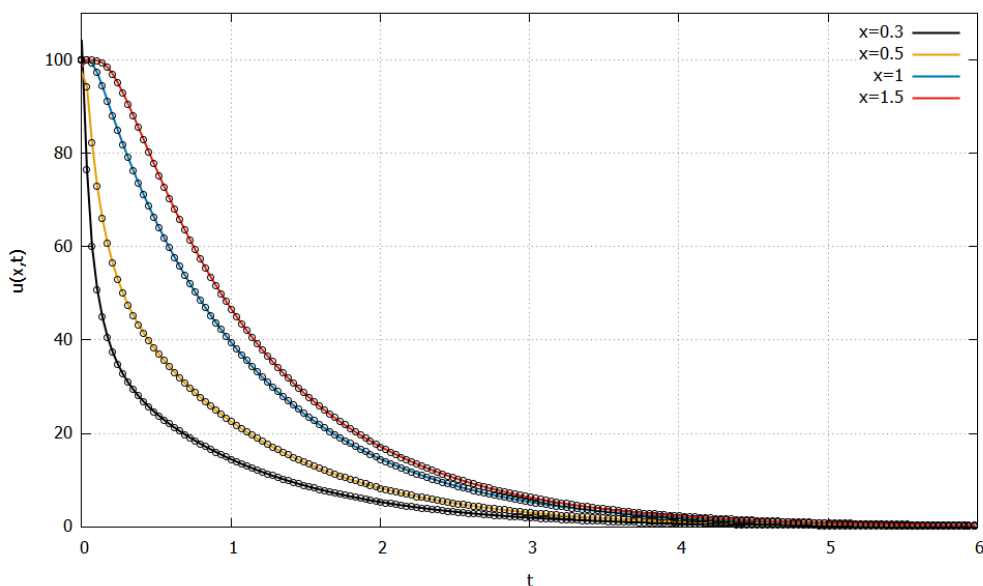


Figura 5: Variação da temperatura no decorrer do tempo com x fixo quando $n = 100$
 Fonte: Os autores (2021).

Tabela 2: Erro relativo (ER) obtido em diferentes posições na haste, com $n = 100$

Posição fixa na haste	ER(%)
0,3	0,2927
0,5	0,1619
1,0	0,1311
1,5	0,1311

Fonte: Os autores (2021).

4 Conclusão

Com este trabalho, é possível concluir que o método das diferenças finitas mostrou-se eficaz na simulação da condução de calor unidimensional em uma haste fina, pois aproximou de forma satisfatória o resultado numérico do analítico. E, além disso, constatou-se que a ampliação do número de pontos discretos do domínio forneceu melhores resultados, isto é, houve uma redução do erro relativo entre a solução analítica e numérica.

Deste modo, os objetivos propostos neste trabalho foram alcançados, já que foi possível determinar uma solução aproximada para o problema de condução de calor e obter o comportamento da distribuição da temperatura ao longo da barra.

No que tange os estudos realizados ao longo da construção desse trabalho, verifica-se que este viabilizou um grande enriquecimento acadêmico ao propiciar um aprofundamento dos conhecimentos relativos às equações diferenciais e aos Problemas de Valor de Contorno, além de possibilitar um estudo significativo acerca dos problemas de condução de calor em sólidos. Permitiu, também, a aplicação de um método numérico aliado ao software Scilab para simulação de um problema representado por uma equação diferencial parcial e a comparação dos resultados obtidos analítica e computacionalmente.



Referências

- [1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 8. ed. Rio de Janeiro - RJ: LTC, 2006.
- [2] CUNHA, M. C. C. Métodos Numéricos. 2. ed. Campinas - SP: [s.n.], 2000.
- [3] ÇENGEL, Y.; GHAJAR, A. J. Transferência de calor e massa: uma abordagem prática. 4. ed. Porto Alegre - RS: AMGH, 2012.
- [4] CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. Métodos numéricos para engenharia. 5. ed. São Paulo - SP: McGraw-Hill, 2008.
- [5] INCROPERA, F. P. et al. Fundamentos de transferência de calor e massa. 6^a edição. Rio de Janeiro, editora LTC, 2008.
- [6] LOPES, V. L. d. R.; RUGGIERO, M. A. G. Cálculo numérico-aspectos teóricos e computacionais. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.
- [7] THOMAS, L. R. O uso de equações diferenciais na modelagem de sistemas naturais e outros. Universidade de Brasília - UnB Planaltina, 2013.
- [8] VIANA, H. S. Método das Diferenças Finitas aplicado a um problema de condução do calor em estado estacionário. Castanhal - PA, 2018. Trabalho de Conclusão de Curso.
- [9] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. Equações Diferenciais. 3. ed. São Paulo - SP: Pearson Makron Books, 2007. v. 1.
- [10] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. Matemática Avançada para Engenharia. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009. v. 3.



OS REGISTROS DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO DE FRAÇÕES HETEROGÊNEAS EM CADERNOS DE ALUNOS DO QUINTO E SEXTO ANO

Victor Fernando Casarotto
UTFPR
Victor.casarotto@hotmail.com

Barbara Winiarski Diesel Novaes
UTFPR

Resumo

O presente trabalho busca discutir aspectos sobre o aprendizado de frações em consonância com os PCNs e currículo da AMOP. Objetiva analisar registros de operações de adição de frações de cadernos de alunos do quinto e sexto ano do município de Toledo, objeto que nos mostra um pouco da cultura escolar presente na escola. Dando enfoque nos conceitos de equivalência de frações, vemos a diferença da matemática que deveria ser ensinada, para a que é ensinada. Percebemos que é o professor grande parte das vezes utiliza o M.M.C., contrariando o Currículo da AMOP, que indica a utilização de conceitos de frações equivalentes como forma de ensino da adição de frações heterogêneas.

Palavras-chave: Adição de frações; História da educação matemática; Cadernos escolares.

1 Introdução

As frações equivalentes, são frações que podem ser representadas de formas diferentes, mas ainda assim, terem o mesmo valor. A adição de frações é aprendida com facilidade quando a fração tem denominadores iguais, mas quando eles são diferentes, os alunos se perdem. Como os alunos aprendem esses conceitos? Por que eles se perdem?

Os cadernos de alunos são materiais importantes para os estudos das práticas docentes dos professores de matemática de outros tempos, sendo assunto importante nos dias atuais. Analisar as diferenças entre a matemática que deveria ser ensinada nas escolas e a que realmente é ensinada. Deste modo, possibilitar práticas de ensino e aprendizagem de melhor qualidade (SILVA, VALENTE, 2009). Tendo como fonte os cadernos dos quintos e sextos anos do Ensino Fundamental de alunos da rede pública do município de Toledo, questionamos: qual a abordagem mais utilizada pelos professores para ensinar a adição de frações heterogêneas?

O presente trabalho trás resultados parciais do plano de trabalho de iniciação científica em desenvolvimento desde setembro de 2021 que tem por objetivo analisar os



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

registros das operações de adição de frações heterogêneas em cadernos¹ de alunos dos quintos e sextos de alunos da Rede Municipal e Estadual do Município de Toledo do ano de 2017 e 2018.

2 Soma de frações equivalentes: BNCC e Currículo da AMOP

As frações tem sido objeto de discussões didático-pedagógicas, sendo um tema polêmico. Para compreender melhor a sua presença nas escolas, devemos fazer uma análise histórica do ensino das mesmas (ALVES, 2021). Frequentemente, há relatos de dificuldades de aprendizado, principalmente no conteúdo de frações (HECK, NOVAES, 2021).

No currículo da Associação dos Municípios do Oeste do Paraná (AMOP) o conteúdo de frações equivalentes deve ser desenvolvido no 4º ano, com o uso de materiais didáticos, e no 5º ano deve ser trabalhado novamente (AMOP, 2015). Ressaltamos este aspecto, pois a compreensão das frações equivalentes é um fator crucial para realizar operações de soma de frações heterogêneas. Uma compreensão sólida é fundamental no cálculo com frações, para que os alunos não se prendam a regras sem compreensão (VAN DE WALLE, 2009)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental prescrevem que as frações devem ser associadas a diferentes representações, frações equivalentes e às operações aritméticas. Os PCNs estão separados em ciclos, vamos focar no 4º ciclo, 5º a 8º série, atual 6º ao 9º ano. No documento a fração é focada na utilização de parte-todo (HECK, NOVAES, 2021).

No currículo da AMOP, a ideia parte-todo deve ser estudada no 4º ano, no 5º é trabalhado o conceito de frações equivalentes, adição e subtração de frações homogêneas. As frações heterogêneas são trabalhadas por meio das classes de equivalência (HECK, NOVAES, 2021).

¹ Os cadernos foram doados por professores e alunos de escolas parceiras ao projeto “Da passagem do quinto para o sexto ano do Ensino Fundamental: uma investigação acerca da cultura escolar, dos processos de ensino e aprendizagem e das concepções docentes e discentes”, coordenado pelo professor Doutor Rodolfo Eduardo Vertuan, aprovado no edital Universal (2016/1), do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ).



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

O currículo da AMOP alerta que normalmente o professor utiliza o mínimo múltiplo comum (MMC) para resolver operações com frações com denominadores diferentes, deixando de lado a ideia de frações equivalentes (AMOP, 2015).

Prevalece a regras de equivalência, diz que devemos multiplicar ou dividir o numerador e o denominador da fração pelo mesmo número (HECK, NOVAES, 2021). Para Van de Walle (2009) é importante o aluno desenvolver um senso numérico fracionário e não começar imediatamente nas regras, esperar até a 7ª ou 8ª ano. Essa regra não ajuda a raciocinar sobre as operações e o que ela significa.

3 Cadernos escolares como fonte de pesquisa

A análise dos cadernos nos mostra um pouco da cultura escolar presente nas escolas e eficácia do ensino de matemática. Revela o dia a dia escolar, o desenvolvimento da metodologia de ensino e as possíveis relações com os valores sociais e o livro didático (SILVA, VALENTE, 2009).

Pode-se observar os valores históricos culturais, a reflexão sobre o ensino - aprendizagem, a apropriação de conhecimento e como isso ajuda como contribuição para os próximos professores (motivação, caminhos eficazes para o ensino da matemática). (SILVA, VALENTE, 2009).

Produção autêntica do aluno, os cadernos escolares são fontes valiosas para as pesquisas em Educação matemática/ História da educação matemática, pois refletem o que ocorre numa sala de aula e permitem definir o currículo real desenvolvido nas escolas (GALLEGO, JIMÉNEZ, 2017).

Vamos lidar com as marcas que o passado deixa no presente, utilizando os cadernos de alunos como fonte de pesquisa para a História da educação matemática (SILVA, VALENTE, 2009). Os cadernos escolares auxiliam no contato e na análise da matemática ensinada. A aprendizagem ocorre com o uso do caderno. Através dos cadernos podemos ver como o docente usa sua formação, como ele faz a relação com o saber (HECK, NOVAES, 2021).

A abordagem da história cultural tem como principal objetivo identificar como a realidade social é construída, pensada e dada a ler. (CHARTIER, 1990 Apud SILVA, 2009). Por meio da história cultural vamos perceber como foram construídos os processos de ensino aprendizagem da matemática e como isso pode ter significado nas práticas dos professores. (SILVA, VALENTE, 2009).



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

O caderno escolar é um instrumento comum do aluno do colégio desde o século XVI. E tem como função ser o guardião das aulas dadas pelo professor. Sendo assim, elemento integrante da prática pedagógica do professor (SILVA, VALENTE, 2009).

O caderno é um dos materiais presentes em nosso cotidiano, apresentando os registros da lousa, orientações dos professores e exercícios resolvidos. É um espaço de interação professor e aluno, tem nele os processos históricos e pedagógicos da vida na escola. Expressa a aula do professor e suas explicações (SILVA, VALENTE, 2009).

O caderno é um reflexo do que aconteceu em sala de aula, mas não o que realmente aconteceu, nem tudo é registrado (HECK, NOVAES, 2021). É considerado um material manipulável, presente na aula, que sempre está com o aluno, para auxiliá-lo no seu aprendizado.

Destaque-se o uso de materiais manipuláveis, etapa necessária no processo de aprendizagem, permitindo o desenvolvimento axiomático (SILVA, VALENTE, 2009).

As ferramentas do professor de matemática são maneiras de efetivar a aprendizagem, que são eles: práticas, materiais, entre outros (JANDREY, SANTOS, 2021).

4 Percurso metodológico

Conforme mencionado anteriormente a coleção de cadernos foi doada por professores e alunos do município de Toledo Paraná. Foram digitalizados por Raquel Helena Tracienski Heck no ano de 2019. Dois desses cadernos foram analisados no trabalho de conclusão de curso “Reflexos das frações ensinadas em cadernos escolares do quinto ano” (HECK, 2021), defendido em 2021 no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Partindo do pressuposto que as fontes de pesquisa são inesgotáveis e dependem do olhar do pesquisador, analisamos novamente os dois cadernos da pesquisa da Heck, mais cinco cadernos do quinto ano (quatro escolas diferentes) e onze do sexto ano de escolas/colégios distintos. O foco dessa pesquisa é analisar estes cadernos, em relação às operações de adição de frações heterogêneas.

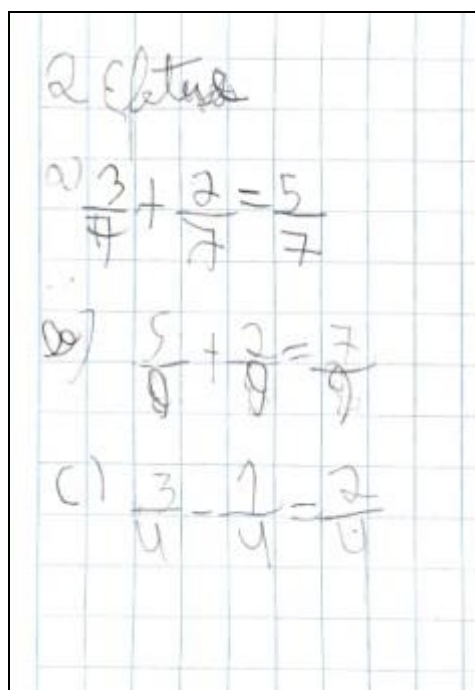
A opção foi analisar a coleção completa de cadernos que estavam disponíveis e que possuíam o conteúdo objeto de análise.

Vamos observar como o professor trabalha o conteúdo de adição de frações heterogêneas, faz uma introdução? Começa com a regra do M.M.C.? trabalha o conteúdo de forma diferente?

5 Soma de frações heterogêneas em cadernos do quinto ano

A maioria dos cadernos do quinto ano, tem o foco em representar frações, poucos trabalham com operações, quando o fazem, utilizam frações homogêneas.

No caderno A² do quinto ano temos a adição e subtração de frações homogêneas. Como podemos ver na figura1.



2) Letura

a) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

b) $\frac{5}{8} + \frac{2}{8} = \frac{7}{8}$

c) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

Figura 1: Caderno A, 5º ano

Fonte: Caderno A (2018)

No caderno B do quinto ano temos a adição e subtração de frações homogêneas e heterogêneas, a professora trabalha com conceitos de equivalência, multiplicando o numerador e o denominador, como indicado no Currículo da AMOP, mas podemos ver exemplos que o aluno não compreendeu o processo/ideia. O aluno faz a operação apenas no numerador e deixa o maior denominador como resposta, conforme figura 2.

² Nomes fictícios adotados pelo autor deste trabalho. Lembrando a necessidade de preservar a identidade dos participantes da pesquisa (donos dos cadernos).

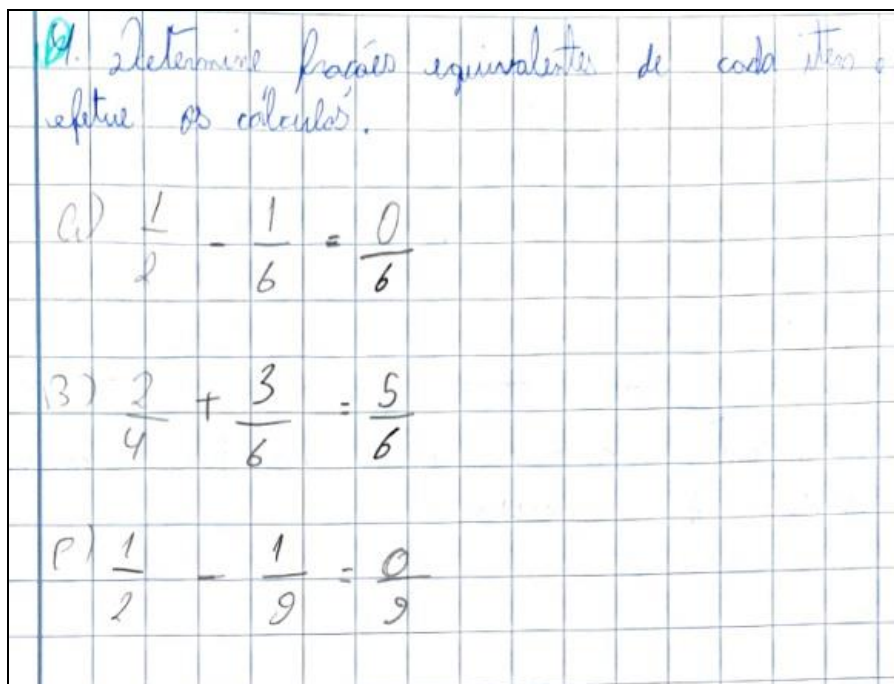


Figura 2: Caderno B, 5º

Fonte: Caderno B (2017)

6 Soma de frações heterogêneas em cadernos do sexto ano

Todos os cadernos do sexto ano revelam o trabalho com operações de frações, homogêneas e heterogêneas.

Nos cadernos do Colégio Alfa, a professora antes de iniciar o conteúdo de frações, passa pela decomposição de fatores primos e em seguida a regra de mínimo múltiplo comum (MMC), como podemos observar no caderno C (figura 3).

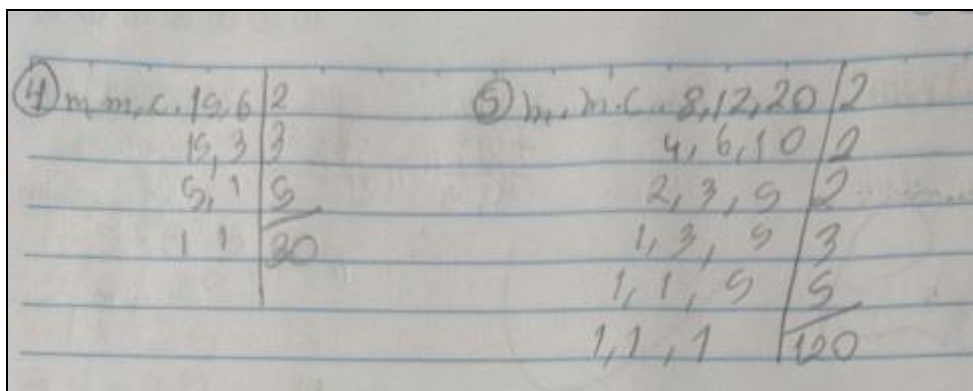


Figura 3: Caderno C, 6º ano

Fonte: Caderno C (2019)

Posteriormente, trabalhando com as operações, caderno D (figura 4).

$$5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 4,35/2 \quad 60 \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \dots$$

$$\frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60} = \frac{47}{60}$$

$$\frac{8}{12} + \frac{3}{12} + \frac{9}{12} = \frac{20}{12}$$

Figura 4: Caderno D, 6º ano

Fonte: Caderno D (2018)

Já os cadernos do Colégio Beta, a professora prefere passar os conceitos de frações equivalentes, como indicado no Currículo da AMOP, mas não deixa de ensinar o mínimo múltiplo comum (MMC). Como podemos ver no caderno E (figura 5).

Método das frações equivalentes

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

Método m.m.c

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

m.m.c

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$$

Figura 5: Caderno E, 6º ano

Fonte: Caderno E (2019)



7 Considerações Finais

As análises muito preliminares dos registros sobre operações de adição de frações heterogêneas revelam que este conteúdo é trabalhado mesmo no quinto ano, apesar de não estar previsto no currículo.

Para o sexto ano, há um movimento de ensinar esta operação por meio das frações equivalentes e pelo Mínimo Múltiplo Comum, mas em alguns casos somente a segunda opção é apresentada aos estudantes, com regras que muitas vezes não fazem sentido para o aluno.

Contrariando o currículo da AMOP e os PCNs, que tem como foco as habilidades, que são adquiridas com o ensino das frações equivalentes. Apesar de alguns professores trabalham o conteúdo de forma correta, o documento deve ser seguido por todos.

Pelos cadernos analisados, a abordagem mais utilizada pelos professores da rede pública de Toledo, para ensinar a soma de frações heterogêneas foi a regra do M.M.C. e não trabalhar com o conceito de frações equivalentes.

Porem, podemos ver um avanço no ensino, há professores que utilizam os conceitos de fração equivalente. Mas agora, vem a questão: Por que os professores utilizam o M.M.C. direto, sendo que está previsto os conceitos de frações equivalentes no currículo? Será que o professor não tem segurança com este conteúdo?

REFERÊNCIAS

ALVES, Antonio M. M. (2021). **Resenha do livro A MATEMÁTICA DO ENSINO DE FRAÇÕES**: do século XIX à BNCC. *Revista De História Da Educação Matemática*, 7, 1-7. Recuperado de <http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/400>

AMOP - Associação dos Municípios do Oeste do Paraná. Departamento de Educação. **Currículo básico para a escola pública municipal: Educação infantil e ensino fundamental - anos iniciais**. Cascavel: AMOP, 2015. p. 262 – 579.

GALLEGO, Dolores C.; JIMÉNEZ, Encarnación S. Las Matemáticas en un libro de clase” freinetiano. In: GALLEGU, D. C.; MARTÍNEZ, J. D. L.; RUIZ-FUNES, M. J. M.; IBÁÑEZ, R. S.; JIMÉNEZ, E. S.; VIÑAO FRAGO, A. (Org.). **Los cuadernos escolares: entre el texto y la imagen**. Múrcia/Espanha, EDITUM, 2017. v. 1, p. 75-96.



IX Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Formação Docente em Matemática: Políticas, práticas e
tendências

Toledo, 02 a 06 de maio de 2022

HECK, Raquel H. T.; NOVAES, Barbara W. D. REFLEXOS DAS FRAÇÕES ENSINADAS EM UM CADERNO ESCOLAR DO QUINTO ANO. **Seminário Temático Internacional**, v. 1, n. 1, p. 1-19, 2 maio 2021.

HECK, Raquel Helena Tracienski. **Reflexos das Frações Ensinadas em Cadernos Escolares do Quinto Ano**. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Toledo, 2021.

JANDREY, Diogo F.; SANTOS, Edilene S. C. DOS. SABERES PARA ENSINAR FRAÇÕES NO ENSINO PRIMÁRIO NO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA (1960 a 1970). **Seminário Temático Internacional**, v. 1, n. 1, p. 1-15, 30 abr. 2021.

LIMA, Karina Xavier de et al. A ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES COM DENOMINADORES DIFERENTES COM O USO DO CONCEITO DE FRAÇÕES EQUIVALENTES. 2017.

SILVA, Francine Fragoso de Miranda; MACHADO, Rosilene Beatriz; FLORES, Cláudia Regina. Práticas matemáticas inscritas em cadernos escolares: o caso das frações. 2020.

SILVA, Maria Célia Leme de. **Na oficina do historiador de educação matemática: cadernos de alunos como fontes de pesquisa** / Maria Célia Leme da Silva; Wagner Rodrigues Valente; Organizado por Iran Abreu Mendes Miguel Chaquiam. -Belém: SBHMT., 2009. (Coleção da Matemática para Professores, 19).

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no ensino fundamental** [recurso eletrônico] : formação de professores em sala de aula / John A. Van de Walle ; tradução Paulo Henrique Colonese. – 6. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : Artmed, 2009.