Introdução à Álgebra de Lie

Wilian Francisco de Araujo

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

e-mail: wilianfrancisco@gmail.com

Figure 1. Sophus Lie circa 1870.

"Estou certo, absolutamente certo de que ... essas teorias será reconhecido como fundamental em algum momento no futuro.".. - Sophus Lie

"Sem fantasias ninguém pode se tornar matemático".. - Sophus Lie

Introdução

As álgebras de Lie, reconhecidamente um dos aparatos mais importantes da matemática e com aplicação em outras ciências, surgiu com Sophus Lie, por volta de 1870, dentro de seu programa de estudar as equações diferenciais à luz da teoria de Galois para equações algébricas. Neste minicurso o objetivo é de introduzir os conceitos básicos para definir uma álgebra de Lie, e apresentar alguns exemplos.

1 Espaços Vetoriais

Nesta seção vamos definir o que é um espaço vetorial.

Definição 1.1. *Um espaço vetorial real é um conjunto V, não vazio, com duas operações:*
Soma

$$\begin{array}{rccc} +: & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}.$$

E a multiplicação por um escalar,

$$\begin{array}{rccc} .: & \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ & (k,v) & \mapsto & kv \end{array}.$$

Tais que para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$, as propriedades abaixo sejam satisfeitas.

i) $(u+v)+w = u+(v+w)$;

ii) $u+v = v+u$;

iii) Existe $0 \in V$ *tal que* $u+0 = u$; *(0 é chamado vetor nulo);*

iv) Existe $-u \in V$ *tal que* $u+(-u) = 0$;

v) $a(u+v) = au+av$;

vi) $(a+b)u = au+bu$;

vii) $(ab)u = a(bu)$;

viii) $1u = u$

Exemplo 1.2. *Dado o conjunto dos vetores do espaço*

$$V = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 = \{(x,\ y,\ z)|\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

e as operações:

Se $u = (x,\ y,\ z), v(x_1,\ y_1,\ z_1) \in \mathbb{R}^3$ *definimos*

$$u + v = (x + x_1,\ y + y_1,\ z + z_1)$$

e

$$\alpha u = (\alpha x,\ \alpha y,\ \alpha z),$$

assim, $V = \mathbb{R}^3$ *é um espaço vetorial.*

Exemplo 1.3. *Dado o conjunto*

$$V = gl(2, \mathbb{R}) = M(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

com a soma e produto por escalar usuais é um espaço vetorial.

Observação 1.4. *Definimos espaço vetorial real, (espaço vetorial sobre o corpo dos reais), mas também poderiamos ter definido espaço vetorial sobre um corpo qualquer.*

Álgebra

Definição 1.5. *Seja* A *um espaço Vetorial sobre* $\mathbb{R}$*. Dizemos que* A *é uma álgebra sobre* $\mathbb{R}$ *se existe uma operação de multiplicação de vetores, que satisfaz a propriedade distributiva sobre a soma de vetores, isto é, existe*

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & A \times A & \longrightarrow & A \\ & (u, v) & \mapsto & u \cdot v \end{array},$$

tal que para todos $u,\ v,\ w \in A$ *temos*

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w \ e \ (u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$$

e para todos $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $u, v \in A$

$$(au) \cdot (bv) = (ab)(u \cdot v)$$

2 Álgebra de Lie

Definição 2.1. *Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial* $\mathfrak{g}$ *munido de um produto, chamado de colchete ou comutador de Lie* $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$*, que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Bilinearidade, ou seja, linear em cada entrada.*
2. *Anti-simetria, isto é* $[X, Y] = -[Y, X]$ *para todo* $X,\ Y \in \mathfrak{g}$.
3. *E a identidade de Jacobi, isto é, para todo* $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$*, temos* $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$

Não é difícil verificar que a identidade de Jacobi pode ser reescrita alternativamente de uma das duas formas:
a) $[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$;
b) $[[X,Y],Z] = [[X,Z],Y] + [X,[Y,Z]]$.

O colchete ou comutador de Lie, em geral, não é associativo, pois em qualquer circunstância $[[X,X],Y] = 0$ e no entanto $[X,[X,Y]]$ nem sempre se anula. De fato, se tomarmos por exemplo

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então $[X,X] = XX - XX = 0$. Logo $[[X,X],Y] = 0$, mas $[X,[X,Y]] \neq 0$.

Proposição 2.2. *Numa álgebra de Lie com corpo de característica diferente de 2 vale a seguinte equivalência: $[X,X] = 0$ para qualquer $X \in \mathfrak{g}$ se e somente se $[X,Y] = -[Y,X]$.*

Demonstração: Note que

$$0 = [X+Y,X+Y] = [X,X+Y] + [Y,X+Y] = [X,X] + [X,Y] + [Y,X] + [Y,Y].$$

Mas por hipótese $[X,X] = 0$ para qualquer $X \in \mathfrak{g}$. Assim pela igualdade acima temos que $[X,Y] = -[Y,X]$.

Reciprocamente, suponha que $[X,Y] = -[Y,X]$. Daí

$$[X,Y] + [Y,X] = 0 \text{ para qualquer } X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Assim se $Y = X$ temos que $[X,X] + [X,X] = 0$, ou seja, $2[X,X] = 0$. Com isto temos que $2 = 0$ ou $[X,X] = 0$. Mas como o corpo que estamos trabalhando tem característica diferente de 2, temos que $2 \neq 0$ e portanto concluímos que $[X,X] = 0$. □

Exemplo 2.3. *Seja $\mathfrak{g}$ um espaço vetorial e definamos o colchete como $[W,Z] = 0$ para quaisquer $W,Z \in \mathfrak{g}$. Mostre que com este colchete $\mathfrak{g}$ torna-se uma álgebra de Lie.*

Exemplo 2.4. *Consideremos o espaço vetorial real, $\mathbb{R}$, com colchete definido como $[x,y] = x+y$. Notemos que com este colchete $\mathbb{R}$ não é uma álgebra de Lie. De fato, não vale, por exemplo, a bilinearidade pois $[2x,y] = 2x+y \neq 2[x,y] = 2x+2y$.*

Exemplo 2.5. *Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}$ mas agora com colchete definido pela multiplicação, $[x,y] = x \cdot y$. Sugerimos ao leitor verificar se neste caso $\mathbb{R}$ é álgebra de Lie.*

Exemplo 2.6. *O espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ com colchete de Lie definido por $[(a,b),(c,d)] = (0,0)$ é uma álgebra de Lie, basta notarmos que este é um caso particular do Exemplo 2.3.*

Exemplo 2.7. *Seja $\mathbb{R}^3$, onde o colchete de Lie é definido como o produto vetorial usual em $\mathbb{R}^3$. Então $\mathbb{R}^3$ com este colchete é uma álgebra de Lie. De fato, seja $u = (a, b, c), v = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $w = (m, n, p)$. Daí*

$$[u, v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} i & j & k \\ \beta & \delta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix} = -[v,\ u].$$

$$[u + v,\ w] = (u + v) \wedge w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a + \alpha & b + \beta & c + \gamma \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha & \beta & \gamma \\ m & n & p \end{vmatrix} = u \wedge w + v \wedge w = [u, w] + [v, w].$$

Apesar de trabalhoso, não é difícil verificar a identidade de Jacobi neste exemplo.

Exemplo 2.8. *Seja A uma álgebra associativa arbitrária, onde entende-se por álgebra um espaço vetorial com uma aplicação bilinear (chamado também de operação ou produto) de $A \times A$ a valores em A. Como a anti-simetria e a identidade de Jacobi são características das álgebras de Lie precisamos que a aplicação de A satisfaça estas duas propriedades para que A venha ser uma álgebra de Lie. Por exemplo A torna-se uma álgebra de Lie se definirmos o colchete como*

$$[x, y] = xy - yx, \text{ para quaisquer } x, y \in A.$$

De fato, notemos que vale a bilinearidade pois tomando $x_1, x_2 \in A$ e α um escalar arbitrário, então para todo $y \in A$ fixado, temos

$[\alpha(x_1 + x_2), y] = \alpha[x_1 + x_2, y] = \alpha(x_1 + x_2)y - y\alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 y + \alpha x_2 y$

$-y\alpha x_1 - y\alpha x_2 = \alpha x_1 y - y\alpha x_1 + \alpha x_2 y - y\alpha x_2 = \alpha x_1 y - \alpha y x_1 + \alpha x_2 y - \alpha y x_2$

$= \alpha(x_1 y - y x_1 + x_2 y - y x_2) = \alpha([x_1, y] + [x_2, y]).$

Para a anti-simetria sejam x e $y \in A$, então temos que

$-[y, x] = -(yx - xy) = xy - yx = [x, y].$

Já para a identidade de Jacobi sejam $x, y, z \in A$, então

$[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = [x, (yz - zy)] + [z, (xy - yx)] + [y, (zx - xz)]$

$= x(yz - zy) - (yz - zy)x + z(xy - yx) - (xy - yx)z + y(zx - xz) - (zx - xz)y$

$= xyz - xzy - yzx + zyx + zxy - zyx - xyz + yxz + yzx + yzx - yxz - zxy + xzy = 0.$

Exemplo 2.9. *Definamos em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ tal que $\mathrm{tr}X = 0\}$ o colchete de Lie como $[W, Z] = WZ - ZW$ para qualquer $W, Z \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Tomemos os seguintes elementos em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$*

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} \text{ e } T = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix}.$$

Como

$$[W,Z] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} \right) = -[Z,W],$$

como

$$[W+Z,T] = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & -(a_1+a_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & -(a_1+a_2) \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} = [W,T] + [Z,T]$$

e como satisfaz a identidade de Jacobi (exercício) temos que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$*, com este colchete, é uma álgebra de Lie.*

3 Referências

Referências

[1] *Hoffman, K.* e *Kunze, R.*: Álgebra Linear. Editora Polígono, São Paulo (1971).

[2] *Jacobson, N.*: Lie Algebra. Dover Publications, Inc. (1979).

[3] *San Martin, L.A.B.*: Álgebras de Lie. Editora da Unicamp (1999).