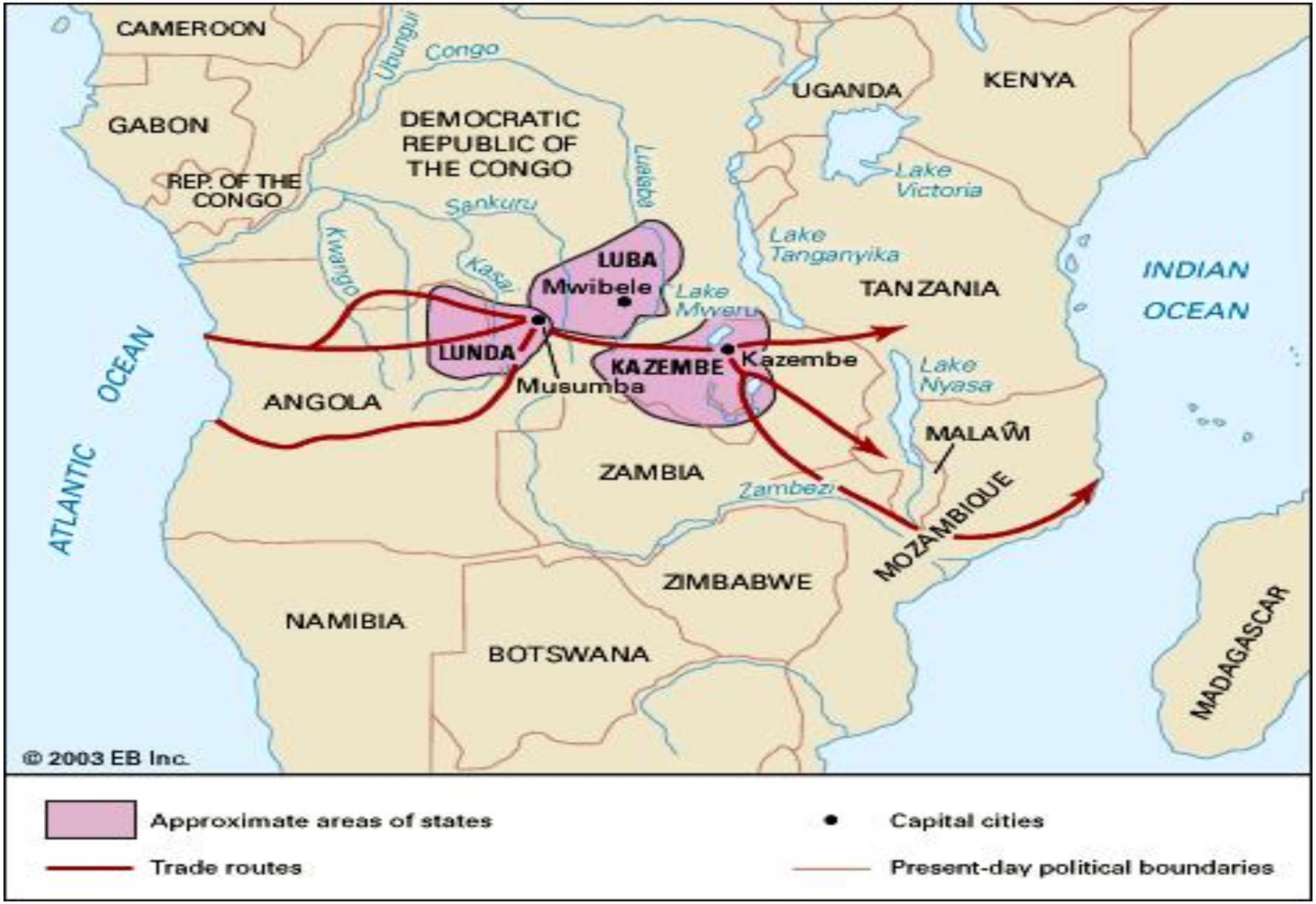
Matemática e Arte
Minicurso com base no livro de Paulus Gerdes

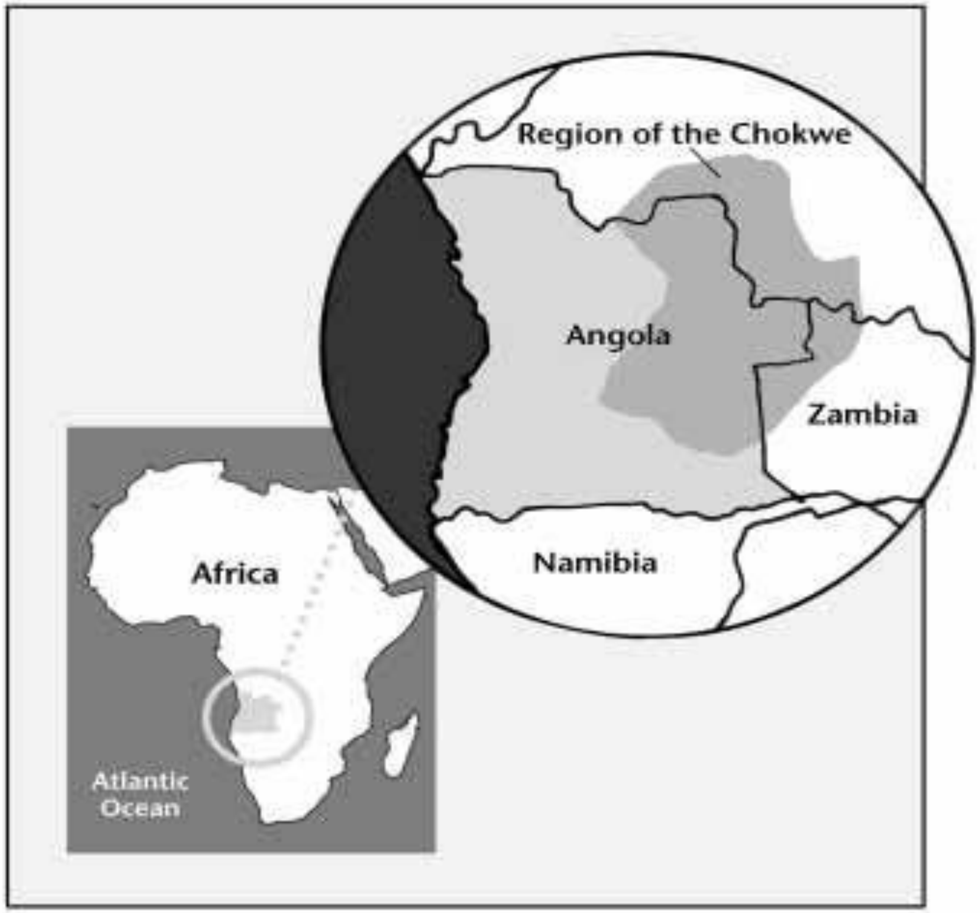
Profa. Dra. Vanessa Largo
Profa. Ms. Heloísa C. da Silva

Reino Lunda, nordeste de Angola, região do povo Cokwe



http://www.africafederation.net/Lunda_3.htm

Região do povo Cokwe

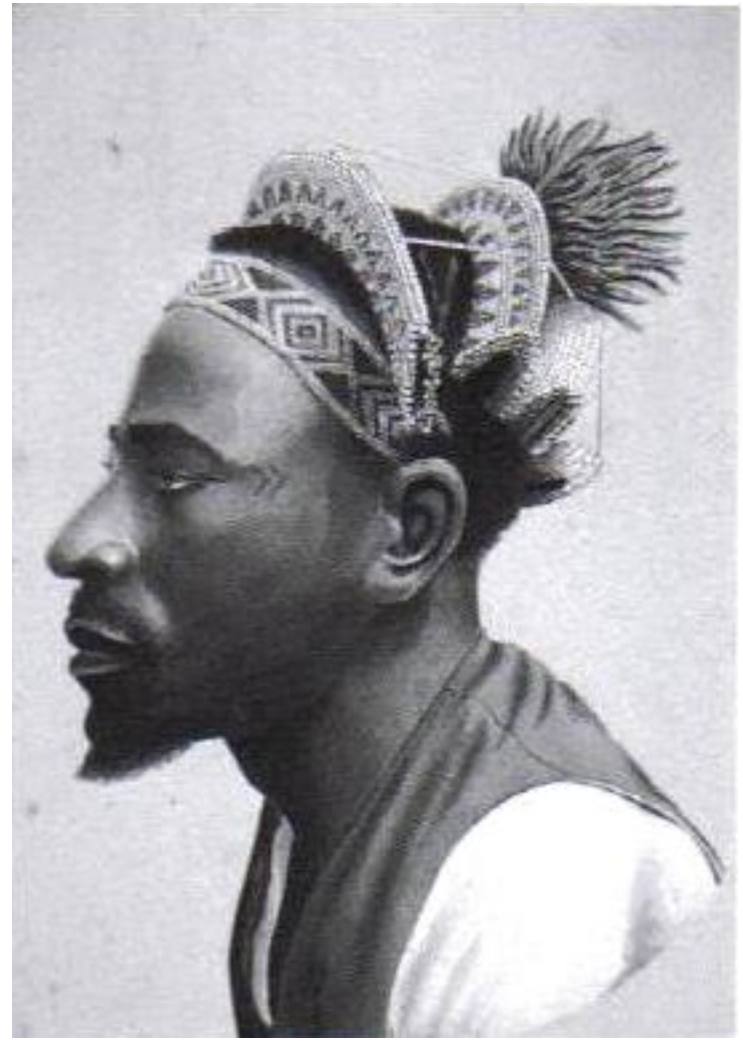


http://1.bp.blogspot.com/-Ktmn7Zz2uw0/TcbHyJ5AFWI/AAAAAAAAA-g/VcvVAPDo3f4/s400/Region%2Bof%2Bthe%2BChokwe.jpg

Bandeira do Reino Lunda

http://www.africafederation.net/Lunda_3.htm

Alguns tipos de coroa real do povo Cokwe, podem ter evoluído dos penteados em cascata, comuns na África central. Observemos os desenhos existentes na coroa.



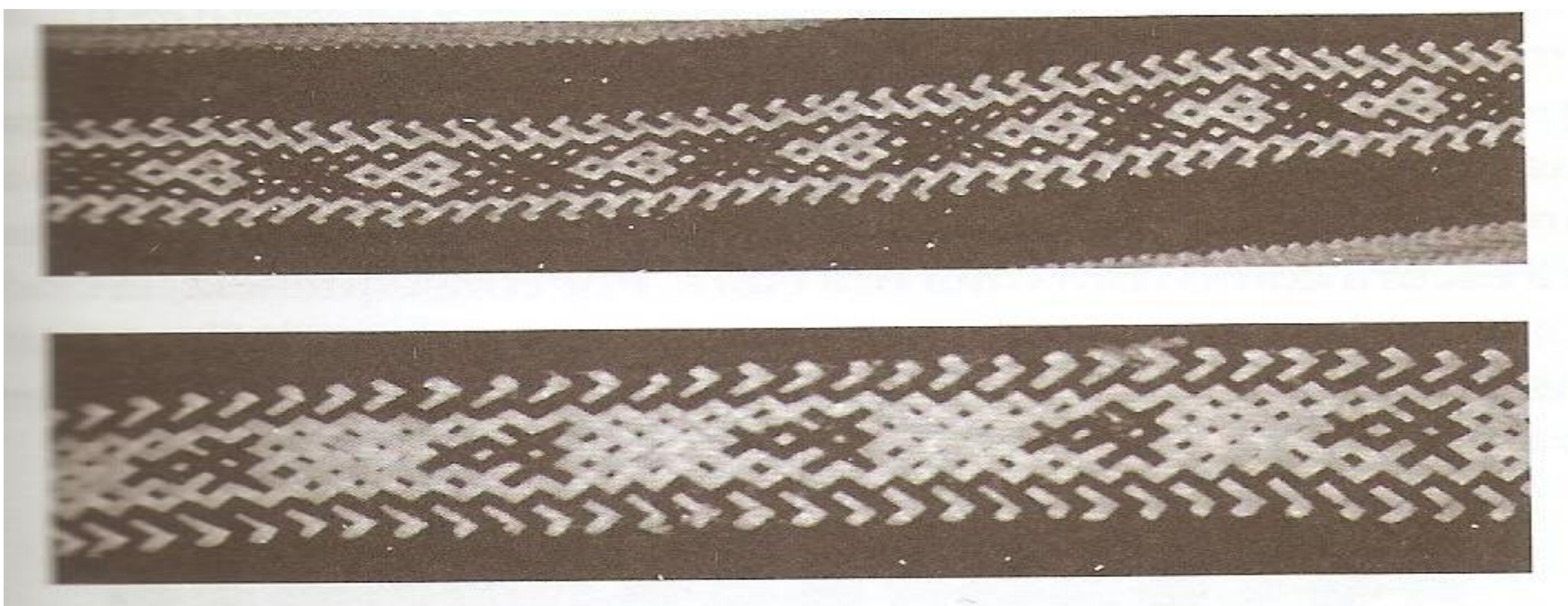
http://www.africafederation.net/Lunda_3.htm

No extremo Nordeste de Moçambique

- Mulheres produzem esteiras de bandas costuradas, que servem para dormir ou para ornamentar a casa;
- utilizam tiras de uma só cor, vibrante, ou produzem as bandas decoradas (*mpaángo*), nas quais as tiras escuras e claras são entrecruzadas, formando ângulos de "45 graus" com os rebordos da banda.

Movimento em ziguezague de uma tira ao longo de uma banda:

As duas faces de uma esteira makwe e os dois tipos de bandas:



Sona: os contos ilustrados de Angola

- **Etnomatemática**: estudo das ideias matemáticas existentes em diferentes culturas. A matemática deixa de ser uma disciplina considerada “pouco interessante” e “ estranha”;

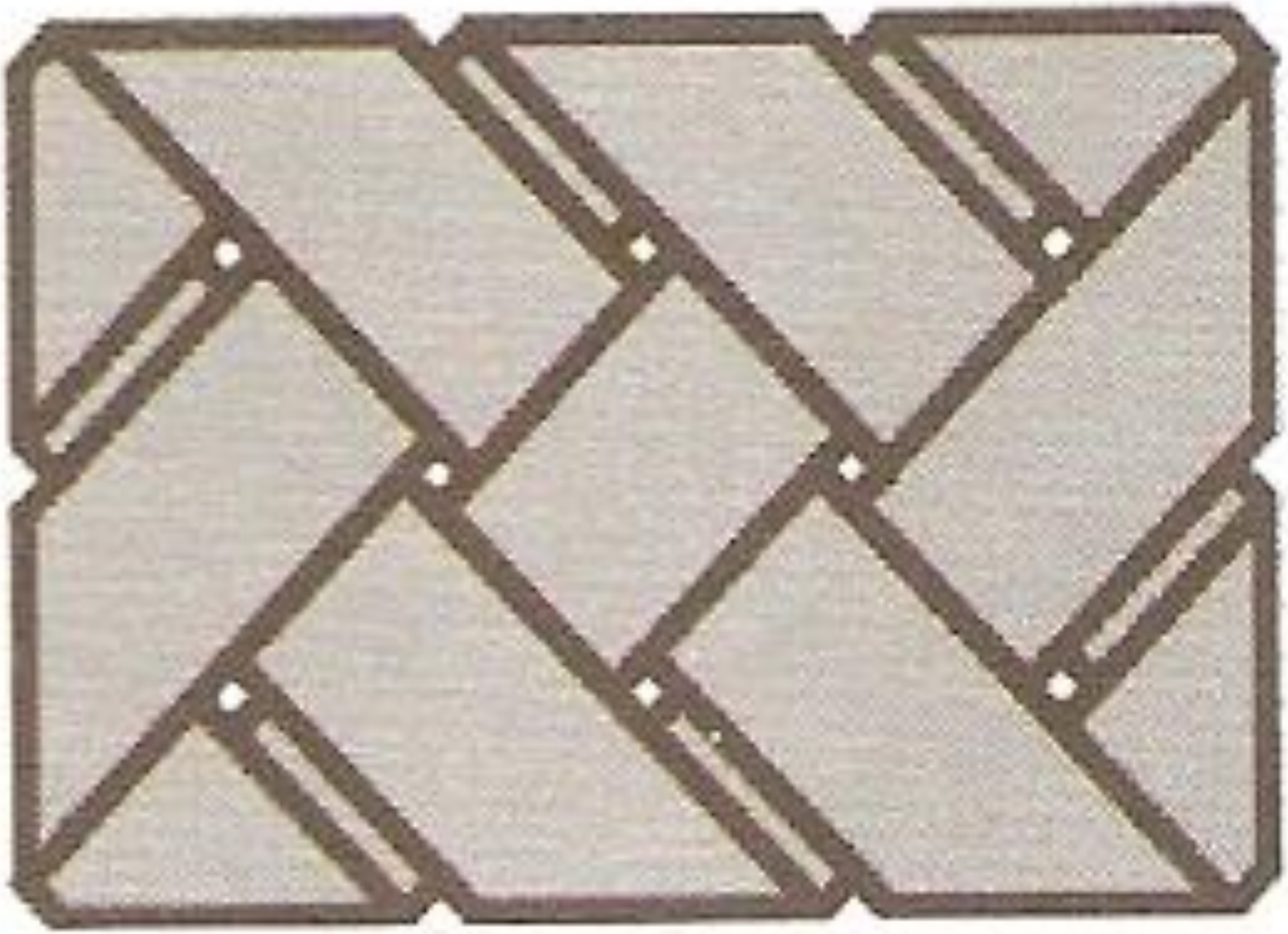
- desenhos chamados “sona” (plural) ou “lusona” (singular);

- o educador matemático **Paulus Gerdes** investigou a geometria existente nos desenhos da tradição do povo cokwe da África. Temos essa pesquisa em seu livro “***Da etnomatemática a arte-design e matrizes cíclicas***”;

- em várias culturas africanas, o nó entrançado simboliza a amizade.

“AMIZADE”

Com uma única tira, vamos trançar a menor esteira retangular possível?



Passos para auxiliar no entrançado da esteira retangular com uma tira

1º Dobrar toda a tira de 1,5 cm em 1,5 cm;

2º Numerar do 1 ao 44, 45...;

3º Sempre com ângulos de 45 graus, dobrar o 30 ao meio (o número ficará escondido);

4º dobrar o 29 para cima;

5º deixar três retângulos e dobrar o 25 ao meio e para baixo e depois o 24 para baixo;

6º deixar aproximadamente dois retângulos, dobrar o 21 (o número ficará escondido), já é preciso que visualize o retângulo;

7º passar a tira por baixo do 28 e por cima do 31;

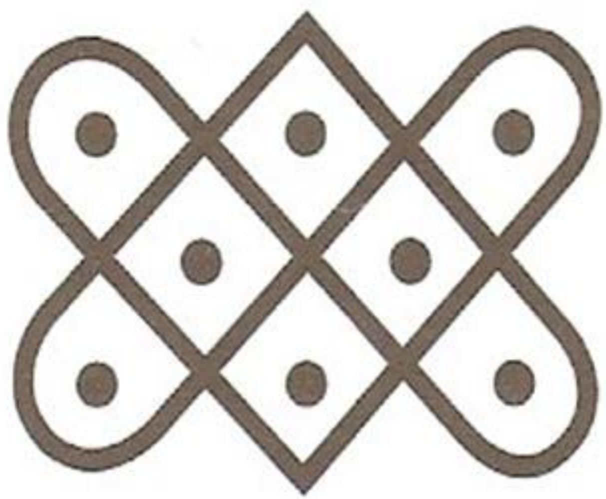
8º dobrar o 19-18 para baixo e 18-17 para baixo novamente;

9º passar por baixo do 32, por cima do 27 e por baixo do 22;

10º dobrar o 13 para cima e o 12 para baixo;

11º passar a tira por cima do 23 e por baixo do 26.

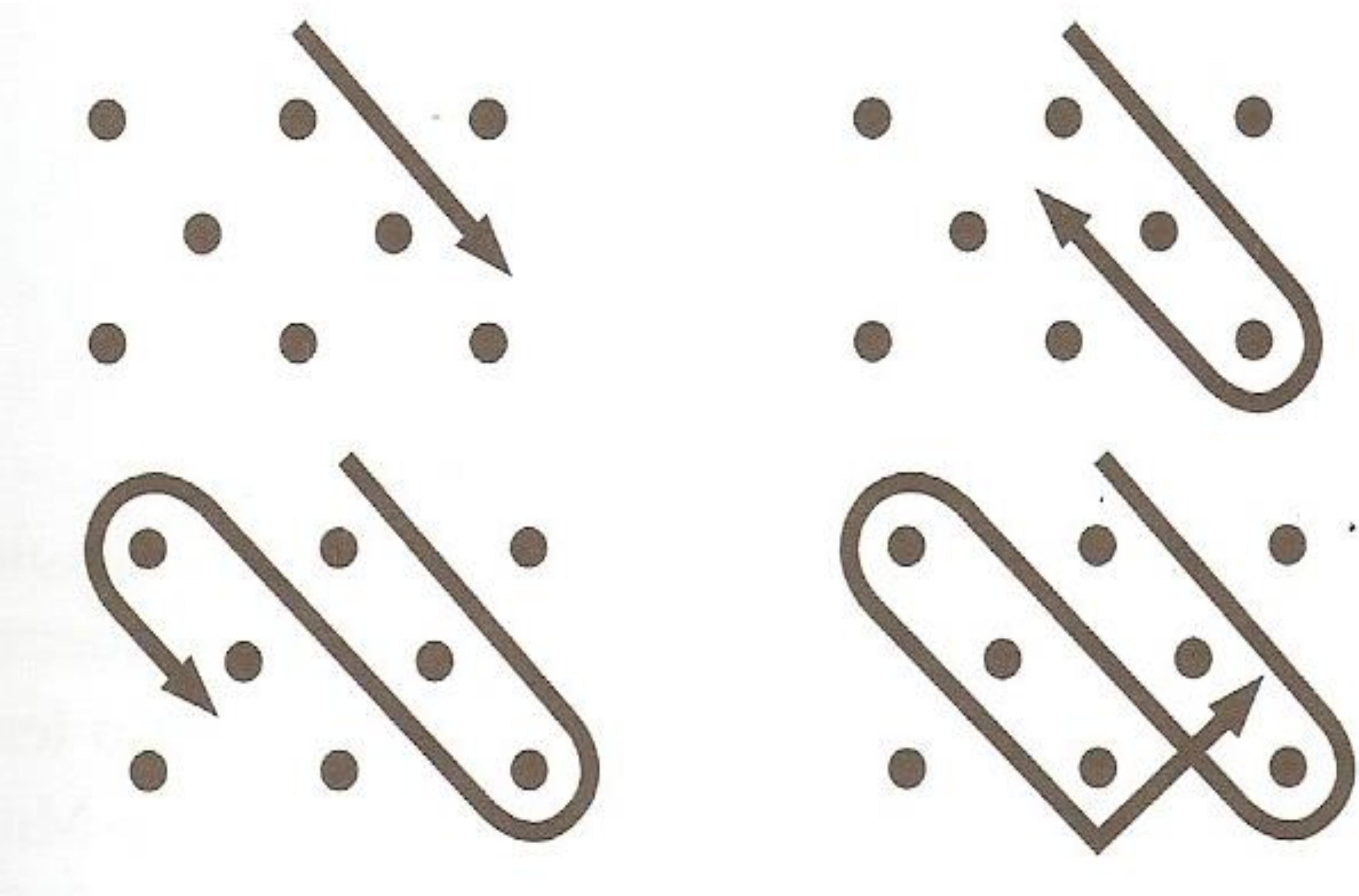
Simbolizando a Amizade:
vamos construir esse ‘lusona’? Lembrando que é preciso utilizar uma só linha, sem tirar a caneta do papel.



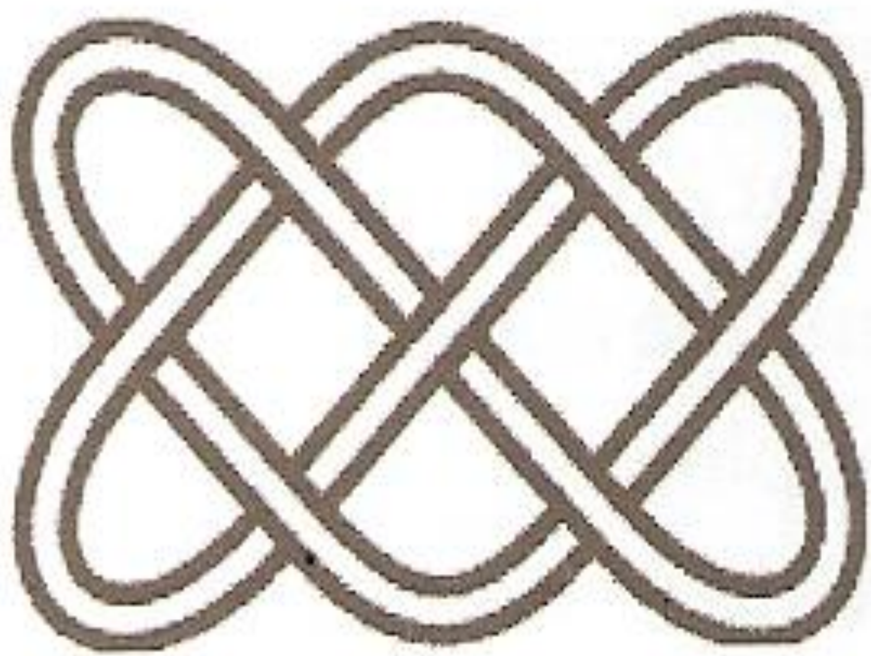
Orientações para a construção do lusona da amizade....

Sistema de Coordenadas

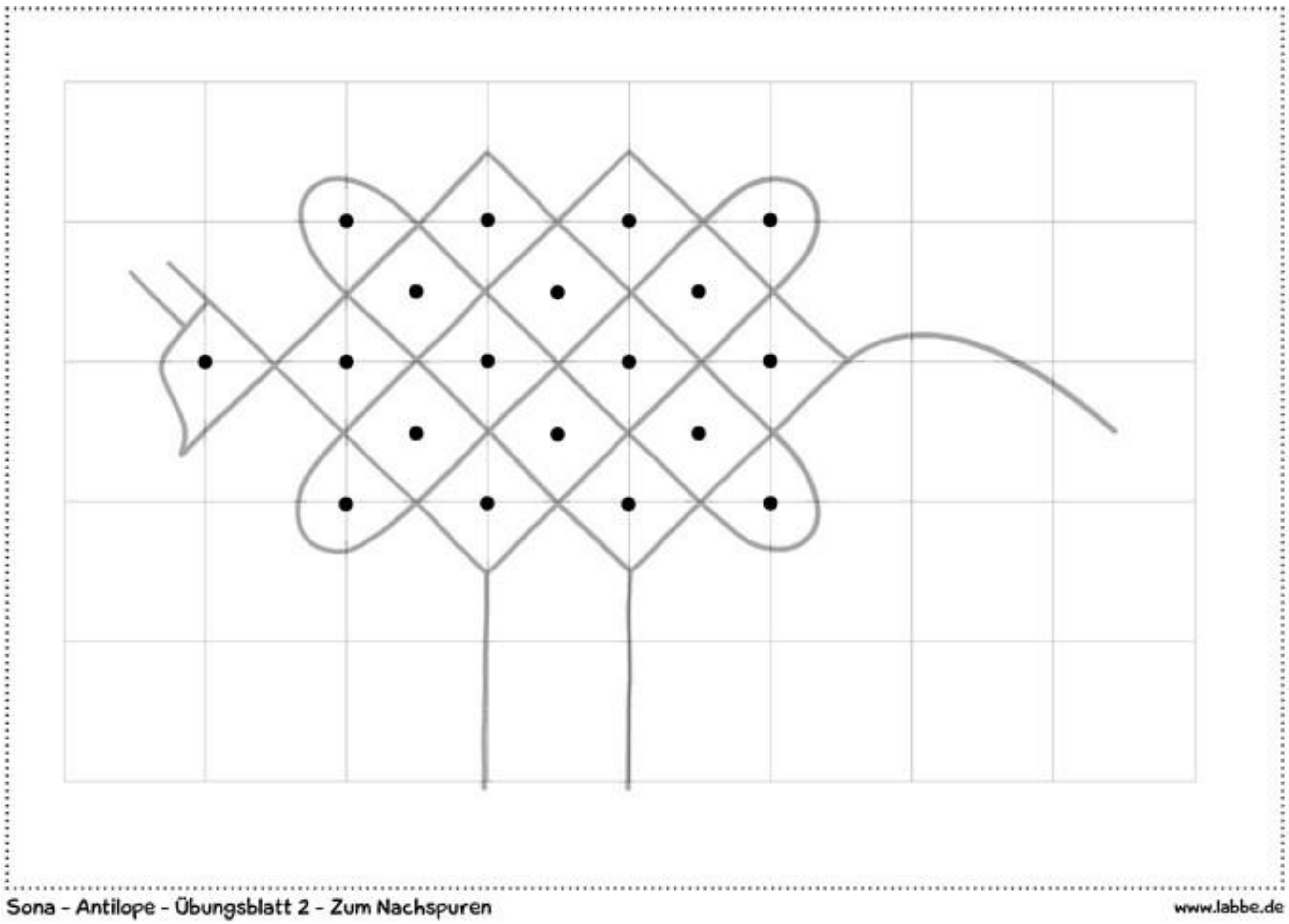
O povo cokwe marca pontos equidistantes com os dedos no solo alisado, e com uma só linha traçam:



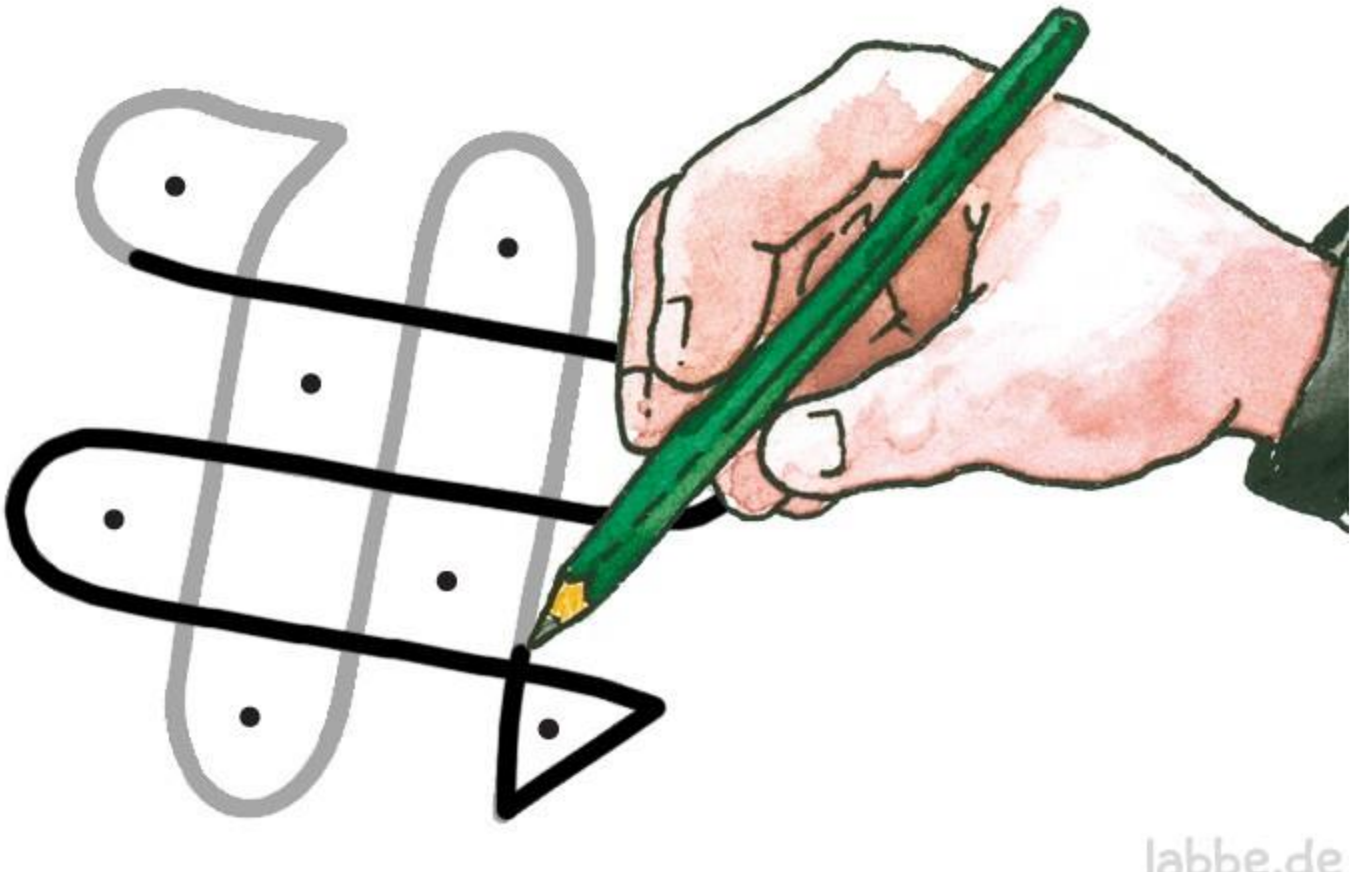
O nó entrançado une os povos, simboliza a amizade entre as pessoas.



Desenhos de animais



Desenhos de animais

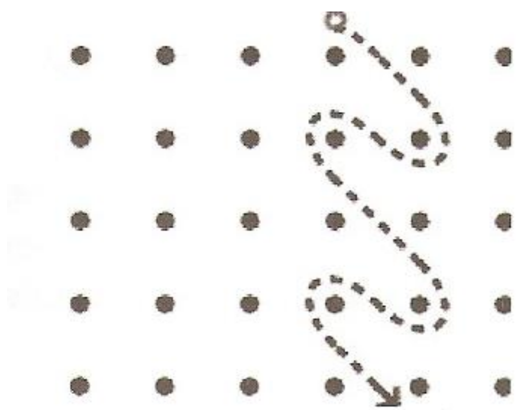


Um algoritmo geométrico em execução: *as histórias são contadas e desenhadas no chão alisado*. Segundo a tradição cokwe, a linha é desenhada sem interrupções, abraça todos os pontos da grelha e apresenta uma simetria rotacional.

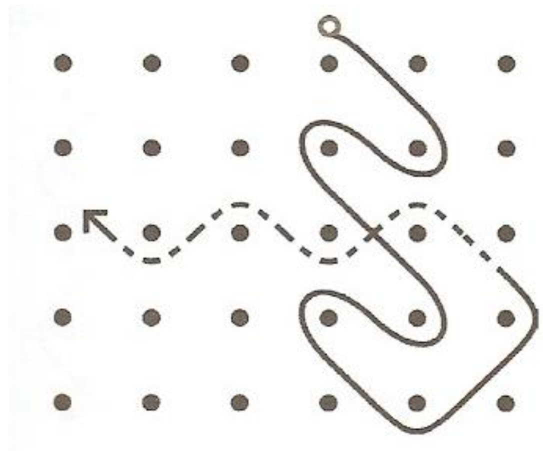
http://anilmenon.com/blog/images/large/malekulaboy_13Large.jpg

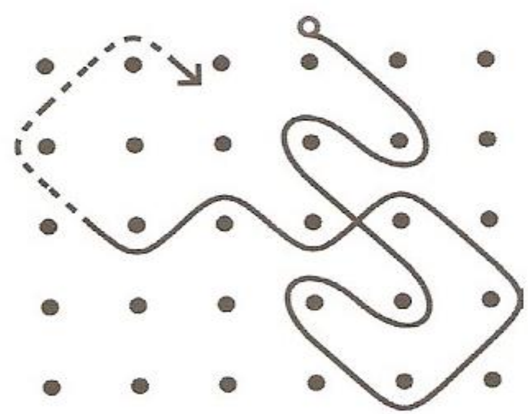
A HISTÓRIA DA 'GALINHA EM FUGA'

Galinha em fuga

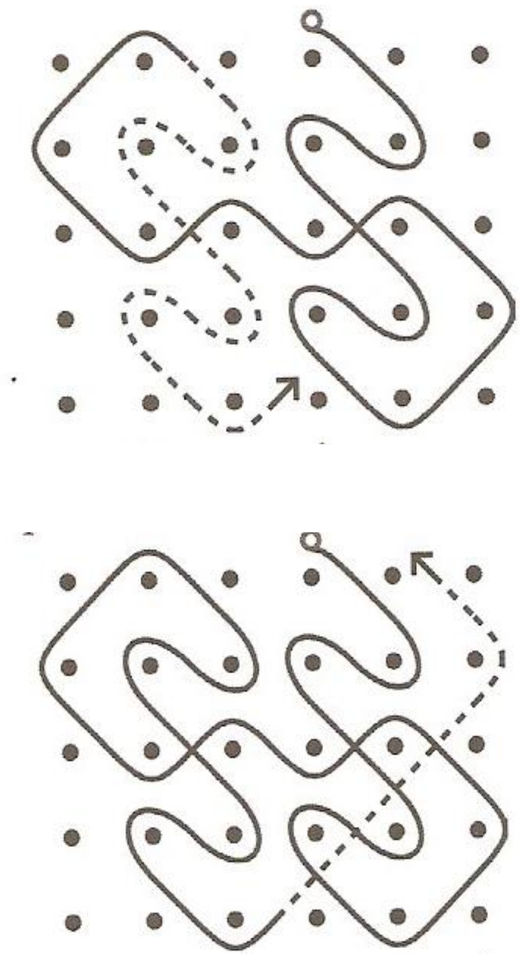


Galinha em fuga

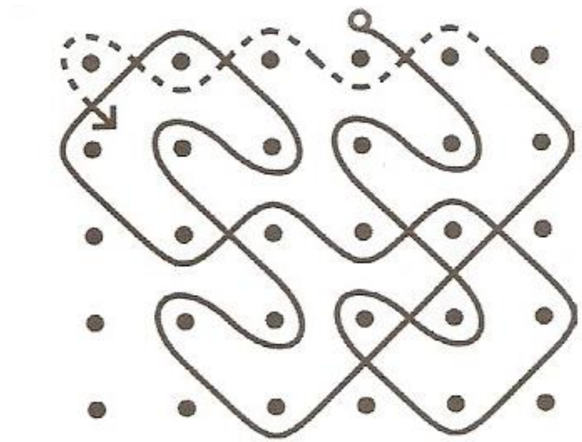


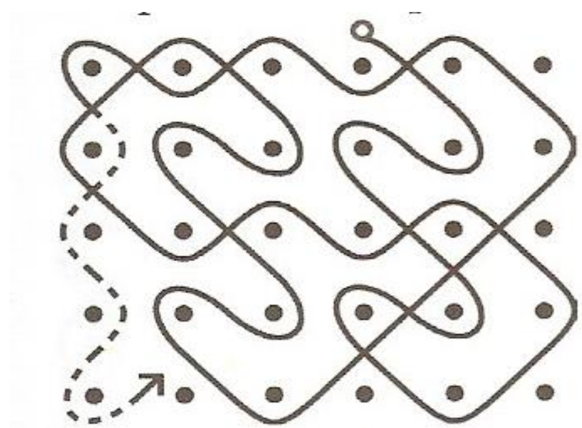


Galinha em fuga

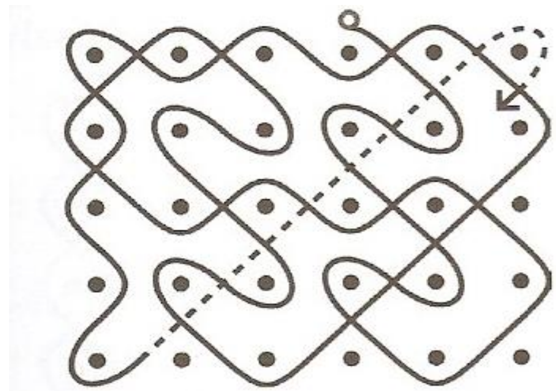


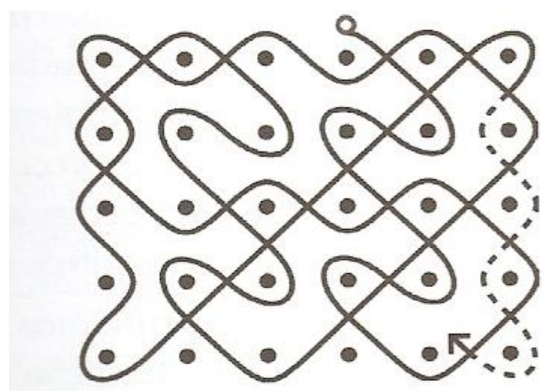
Galinha em fuga



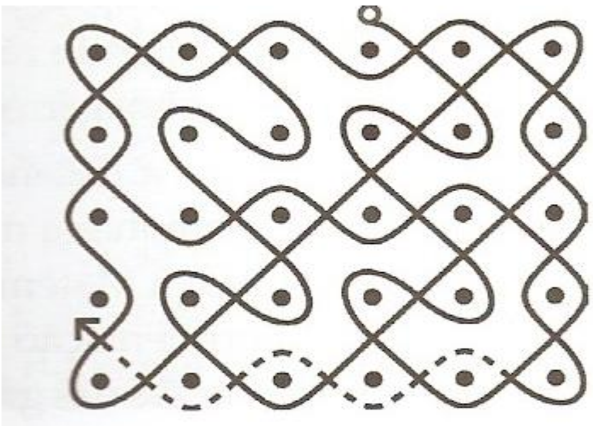


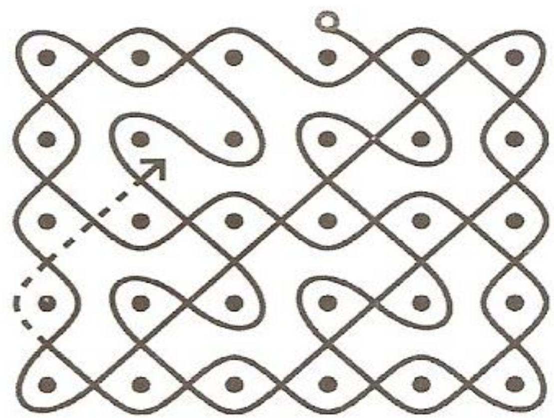
Galinha em fuga

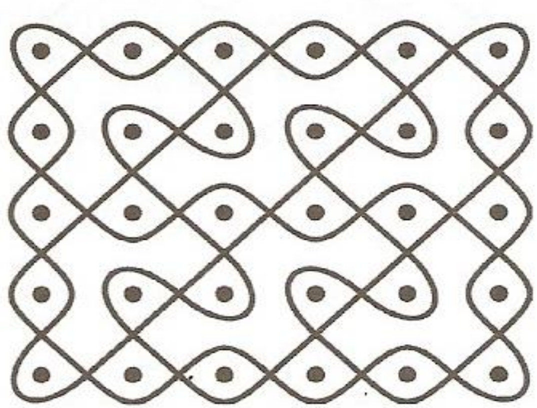




Galinha em fuga

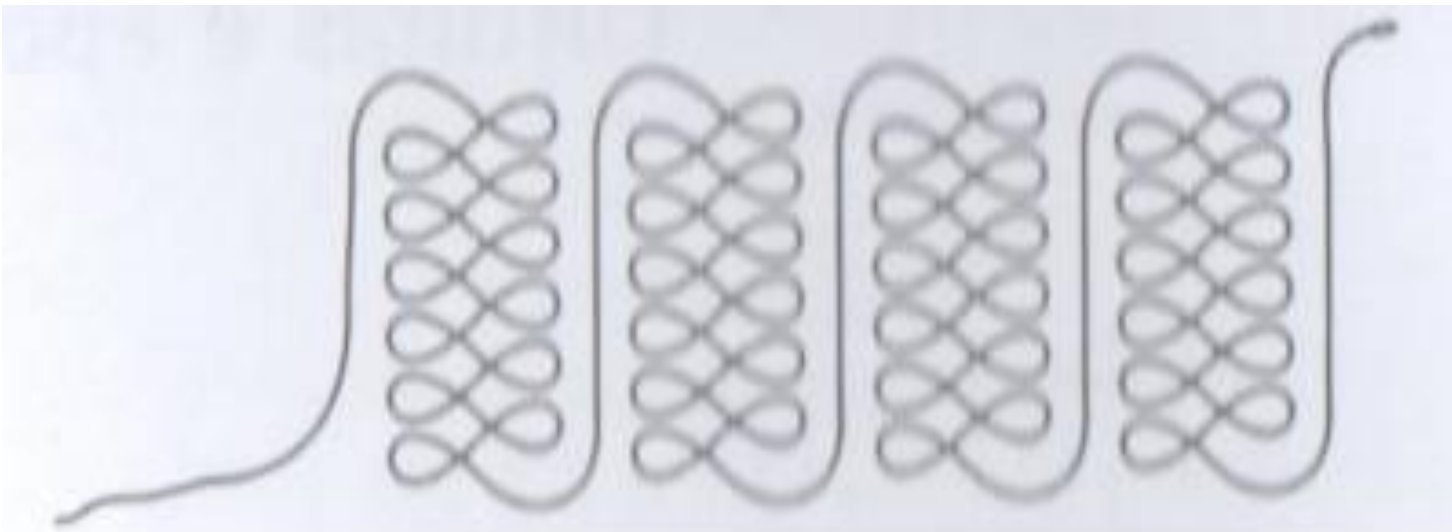




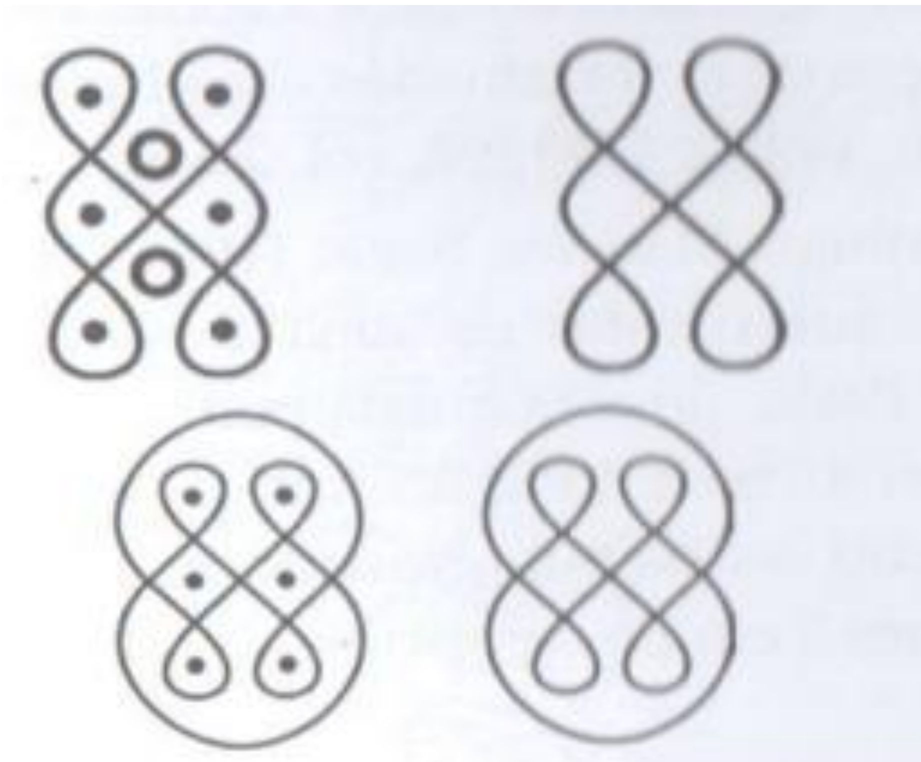


Vamos pensar na rotação de 180 graus desse lusona? O que ocorreu?

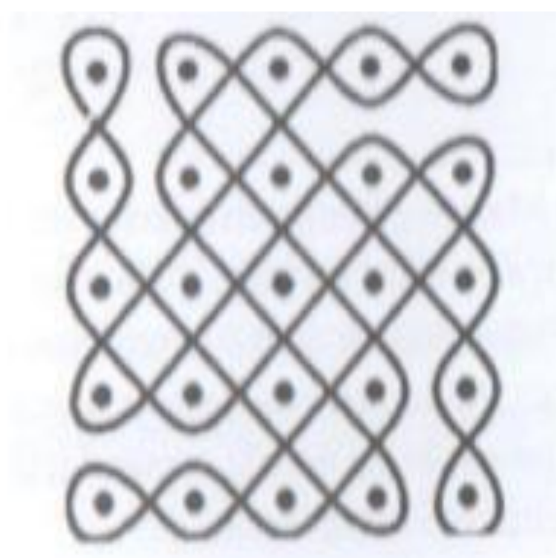
Exemplo egípcio: serpente pintada no túmulo do faraó Ramsés III (1182-1151 a.C.)



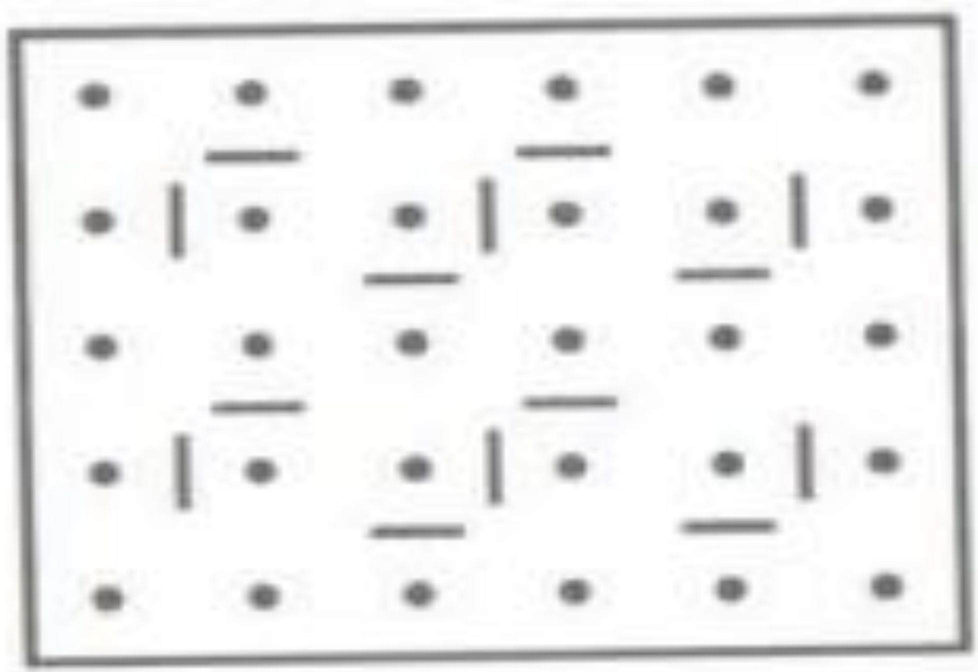
Existe semelhança com os ‘sona’ de Angola. Acrescentando os pontos, os desenhos do Egito Antigo são iguais aos ‘sona’.



Nos exemplos observamos os padrões monolineares: uma única linha abraça todos os pontos da grelha. Os dois padrões que temos agora, são exemplos de desenhos feitos por mulheres tamil no sul da Índia.

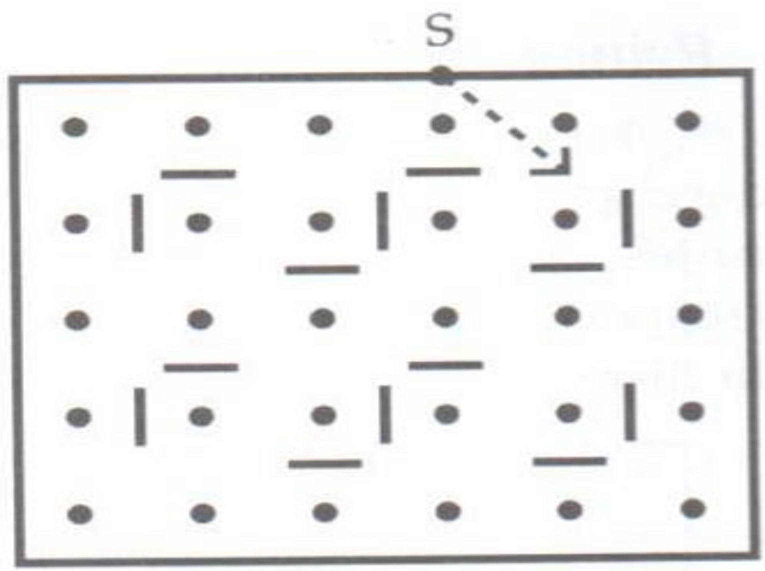


Princípio de construção: dos sona de Angola, dos desenhos do Egito Antigo e dos desenhos das mulheres tamil no sul da Índia. Imaginemos que os lados dos retângulos sejam espelhos, e que no interior do retângulo possamos colocar espelhos menores.



Imaginemos que os espelhos sejam duplos, ou seja, ambas as suas faces refletem raios de luz que incidem sobre elas.

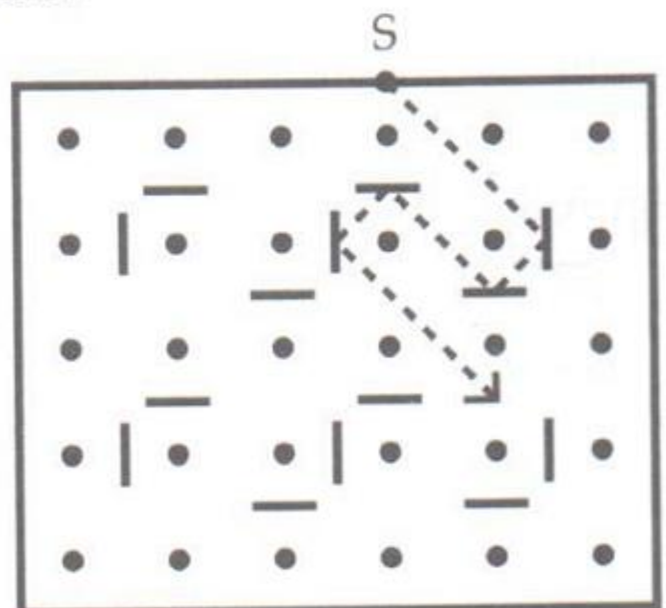
Seja S um ponto no rebordo retangular, situando-se verticalmente por cima dum dos pontos da grelha. Imaginemos, agora, que se emita um raio de luz a partir do ponto de partida S, fazendo um ângulo de 45º com a linha horizontal:



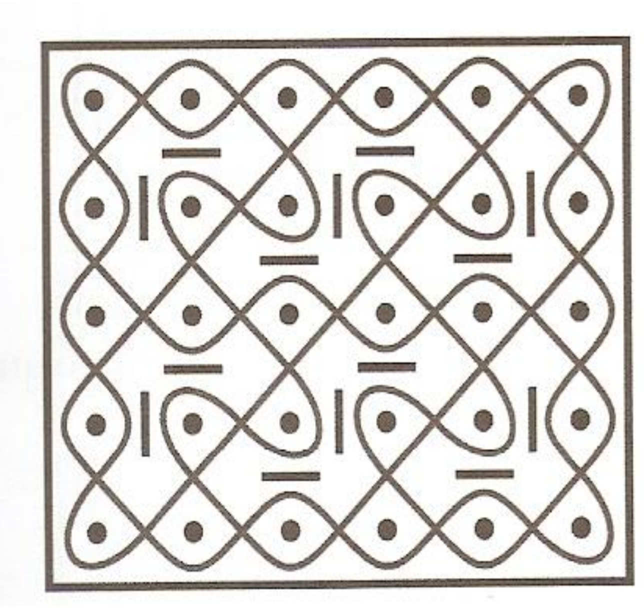
O percurso do lusona 'galinha em fuga' é a versão arredondada da linha poligonal construída. O lusona da 'galinha em fuga' é uma *curva-de-espelho-regular*.

Regular no sentido dos espelhos estarem colocados de acordo com a regra:

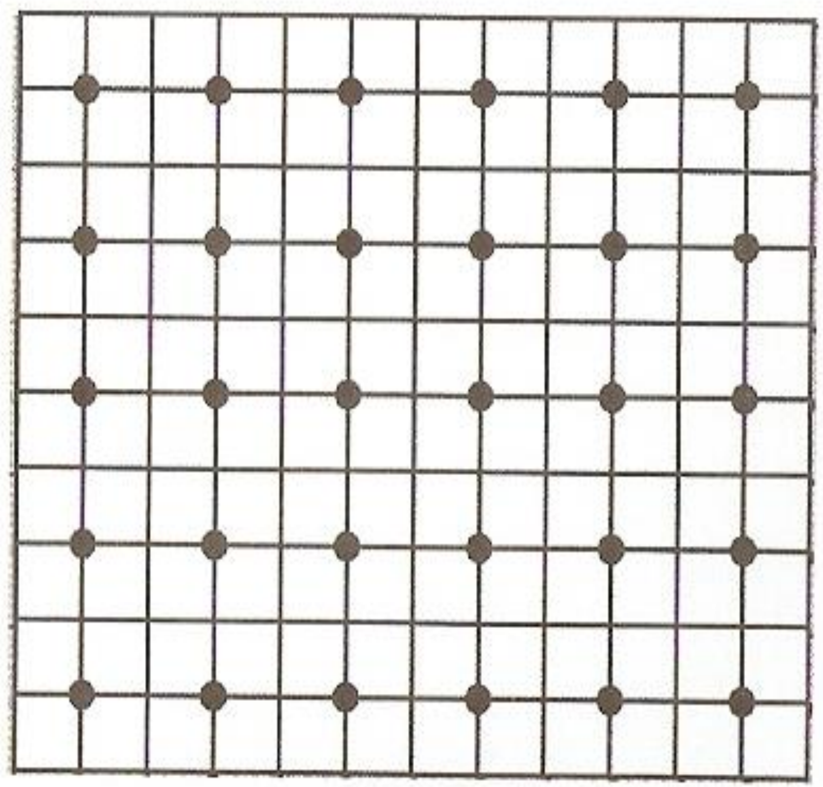
Ao atravessar a grelha, o raio de luz reflete-se tanto nos espelhos pequenos que encontra no seu percurso como nos lados do retângulo:



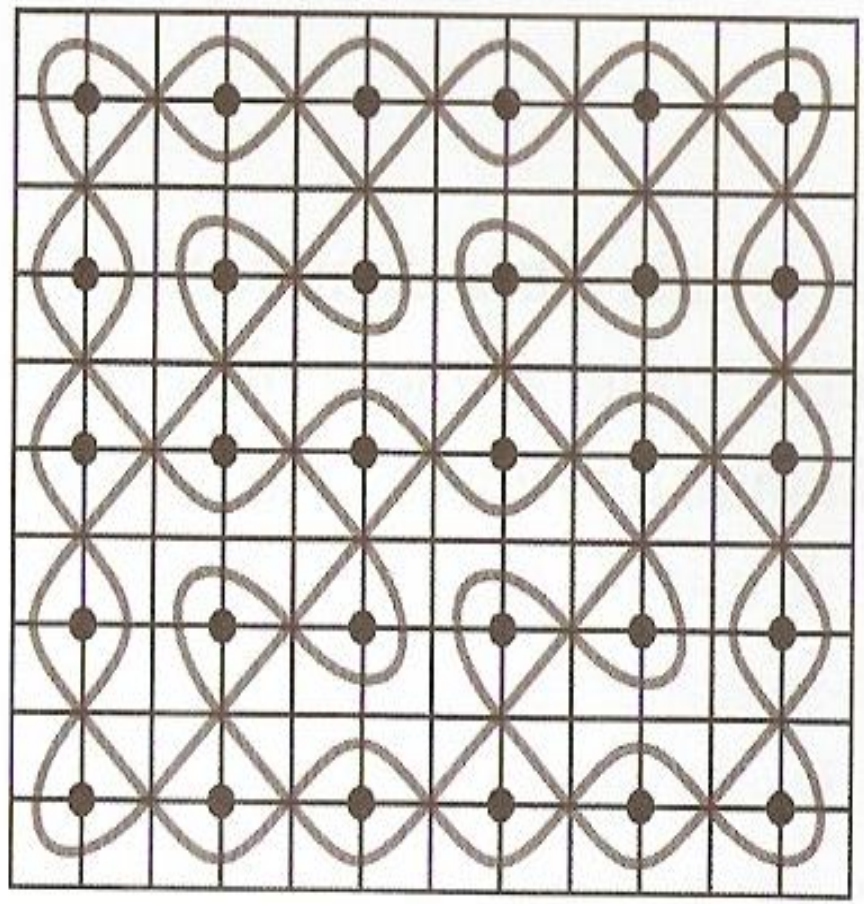
Como podemos observamos no lusona do percurso da ‘galinha em fuga’, a curva-de-espelho-regular



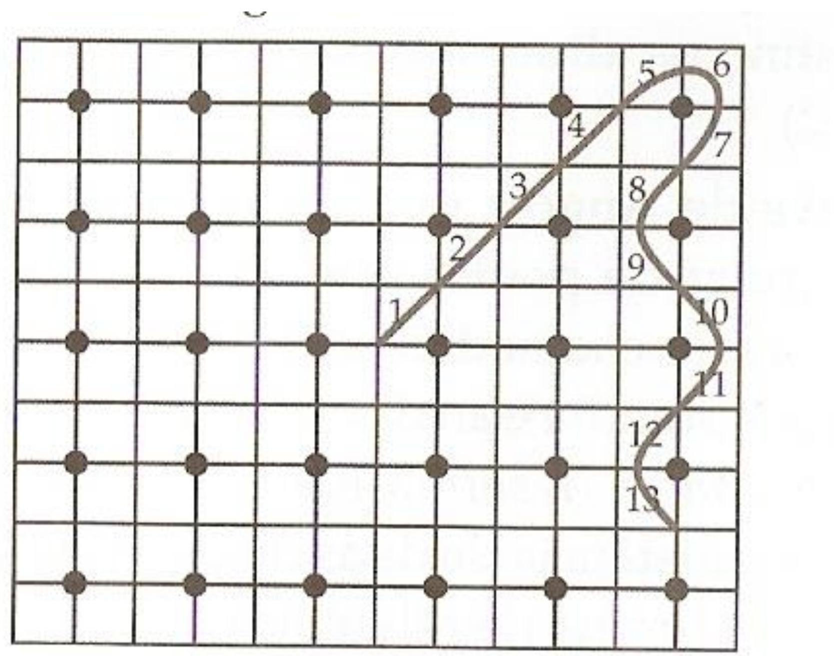
Paulus Gerdes a caminho da descoberta



Deste modo, um desenho composto por uma única linha como o da 'galinha em fuga' passa exatamente uma única vez por cada um dos quadradinhos dentro do retângulo circunscrito à linha.



Enumerando os retângulos circunscritos a linha

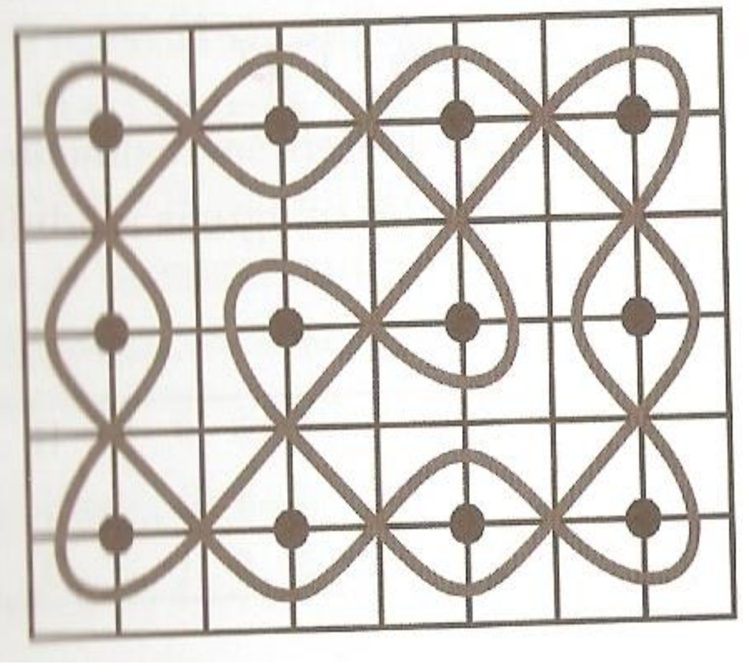


Deste modo obtém-se, a partir da curva inicial, o seguinte retângulo numérico:

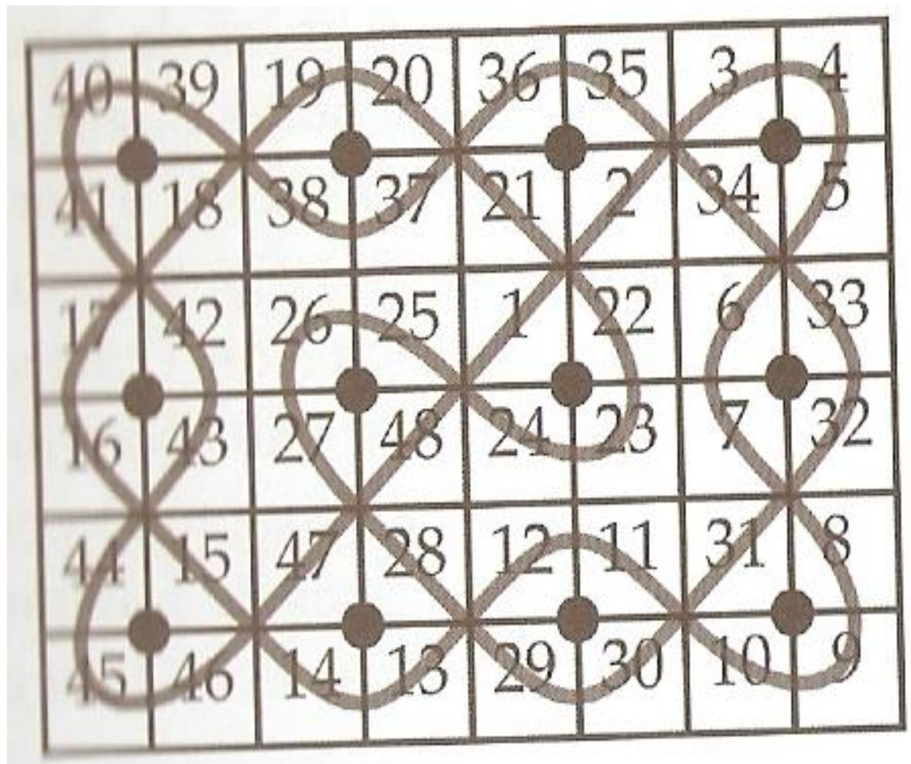
106	105	69	70	102	101	33	34	98	97	5	6
107	68	104	103	71	32	100	99	35	4	96	7
67	108	76	75	31	72	40	39	3	36	8	95
66	109	77	30	74	73	41	2	38	37	9	94
110	65	29	78	62	61	1	42	58	57	93	10
111	28	64	63	79	120	60	59	43	92	56	11
27	112	84	83	119	80	48	47	91	44	12	55
26	113	85	118	82	81	49	90	46	45	13	54
114	25	117	86	22	21	89	50	18	17	53	14
115	116	24	23	87	88	20	19	51	52	16	15

Será que existe alguma relação entre os quadradinhos ?

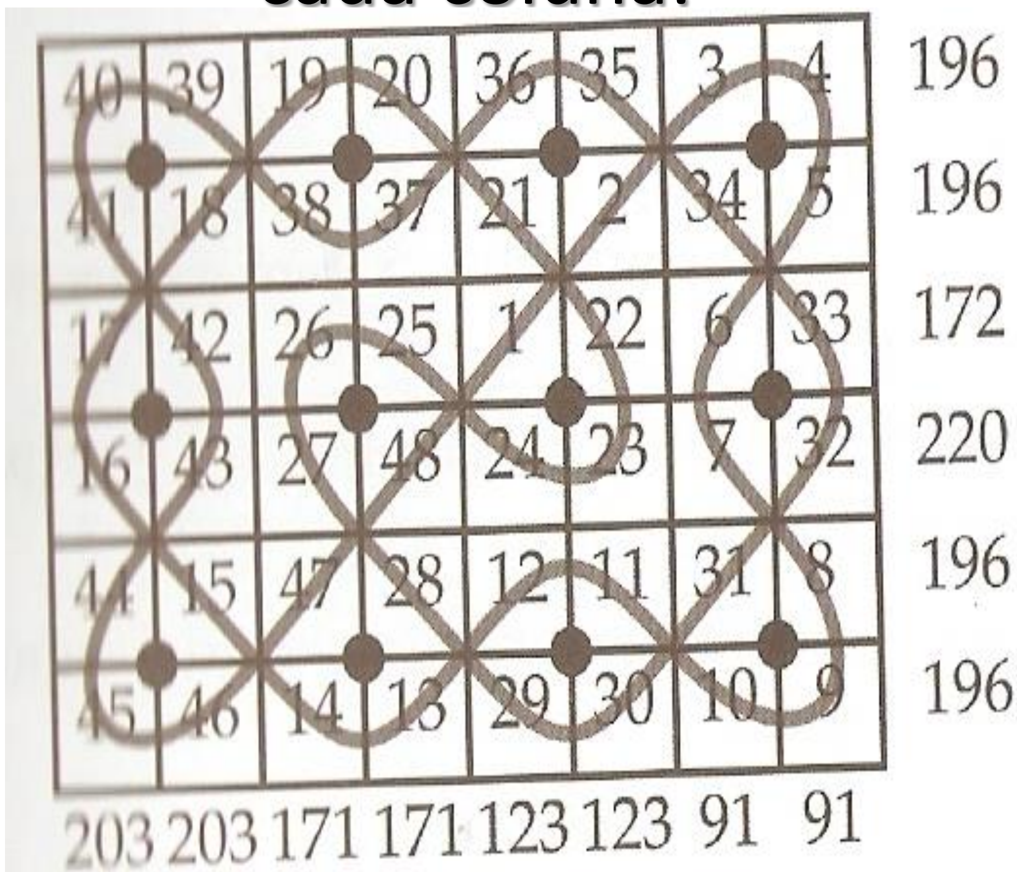
Para observarmos se existem relações, vamos utilizar um lusona com um padrão similar, menor:



Enumerando os retângulos circunscritos a linha



O lusona numerado a partir do centro, e ao lado, temos os números das somas de cada linha e cada coluna:



40	39	19	20	36	35	3	4	196
41	18	38	37	21	2	34	5	196
17	42	26	25	1	22	6	33	172
16	43	27	48	24	23	7	32	220
44	15	47	28	12	11	31	8	196
45	46	14	13	29	30	10	9	196
203	203	171	171	123	123	91	91	

Gostaríamos que as seis somas fossem iguais!!!

Assim, teríamos um retângulo “mágico”!!!

Retângulo “mágico”

Será que alguma vez poderá acontecer:

220 = 196 = 172 ?

“Números distintos nunca podem ser realmente iguais; no máximo podem ser **equivalentes** ou **iguais módulo m**” (GERDES, 2010, p. 54).

contagem natural	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
contagem módulo 4	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	...

Aritmética dos Restos

Módulo 4

Se efetuarmos:

17 : 4, temos?

quociente 4 e **resto 1**.

21 : 4, temos?

quociente 5 e **resto 1**.

Ou seja:

17 é congruente a 21 mod4,

pois os restos são iguais a 1.

Na vida diária, contamos frequentemente módulo 12 ou módulo 7. Quando agora são 9 horas da manhã, daqui a 12 horas são 21 horas, ou seja, 9 horas da noite. Daqui a 24 horas, não são 33 horas, mas, de novo, 9 horas da manhã. Por outras palavras, temos $33 \equiv 21 \equiv 9$ módulo 12. No relógio, contamos o tempo em ciclos de 12 horas. Hoje é quarta-feira. Tendo passado 7 dias, não estaremos na 11.ª feira, mas sim, de novo, na quarta-feira; tendo passado 21 dias, não estaremos na 25.ª feira, mas de novo na quarta-feira. Por outras palavras, temos $25 \equiv 18 \equiv 11 \equiv 4$ módulo 7.

Definição (Gerdes, 2010, p.54)

Seja *m* um número natural qualquer maior que 1. Dois números inteiros *p* e *q* são chamados equivalentes ou iguais módulo *m*, se *p* – *q* for um múltiplo de *m*.

Então, para que valores de *m* poderá acontecer:

220 ser congruente a 196 ser congruente a 172 módulo *m*?

<u>Façamos: p – q</u>

Considerando as linhas:

220 – 196 = 24

Considerando as colunas:

203 – 171 = 32.

Ambos são múltiplos de *m*, logo: 32 – 24 = 8 também o é.

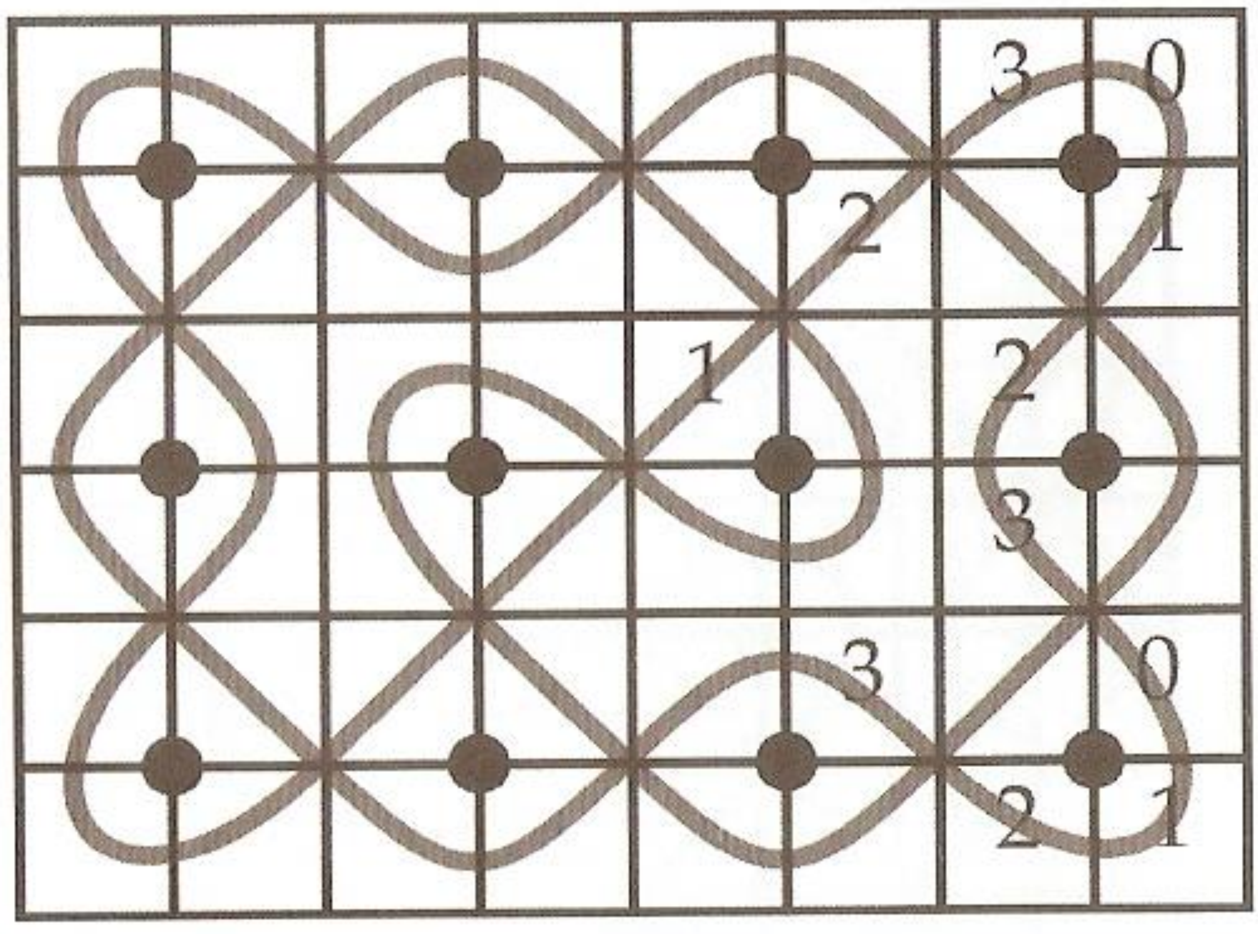
Vemos então que *m* só pode ser: 8, 4 ou 2.

Observemos os números. Ao invés de numerar

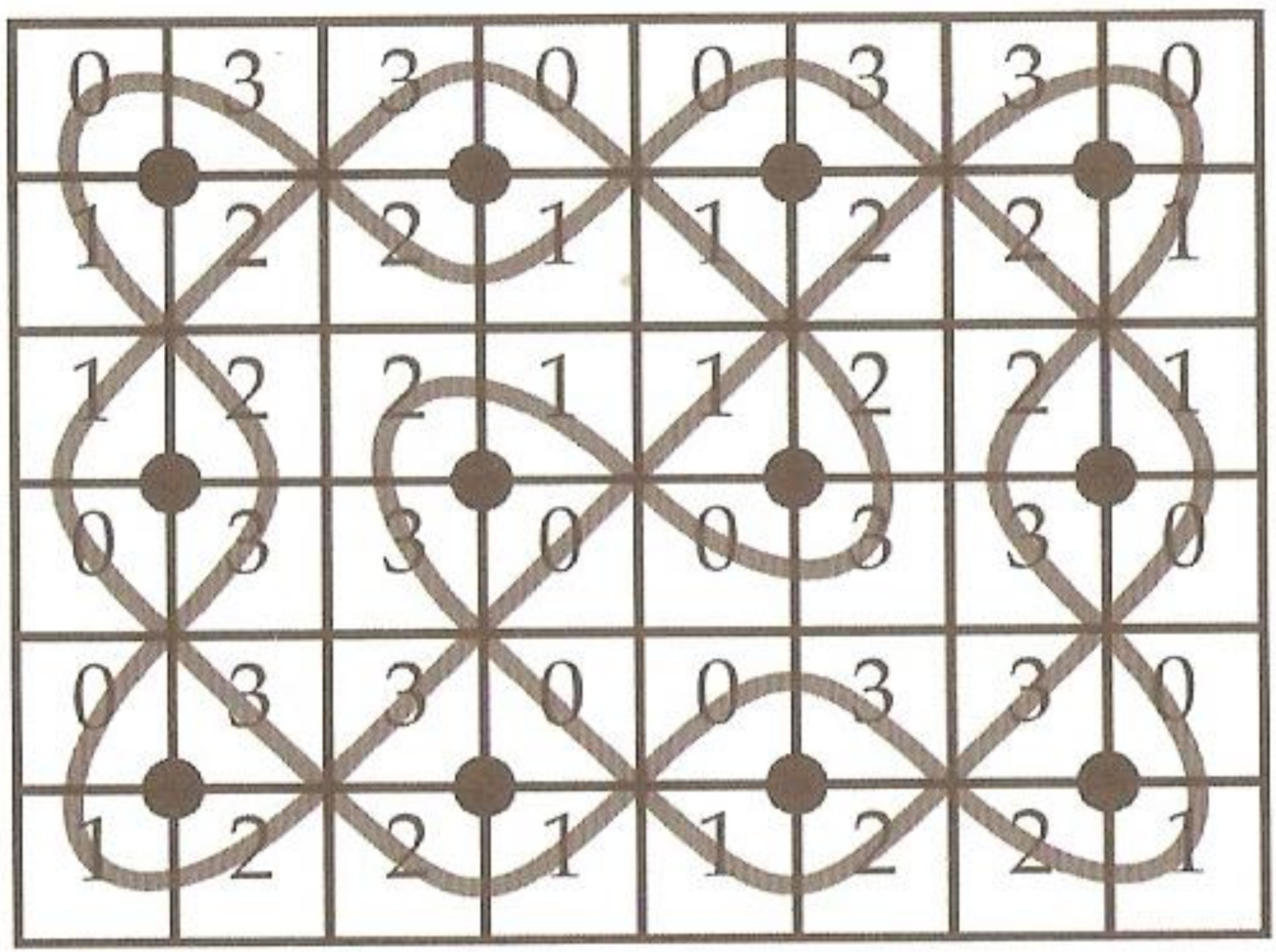
1,2,3,4,5,6,7,.....

enumeremos módulo 4

(1, 2, 3 , 0, 1 , 2 , 3 , 0, ...)

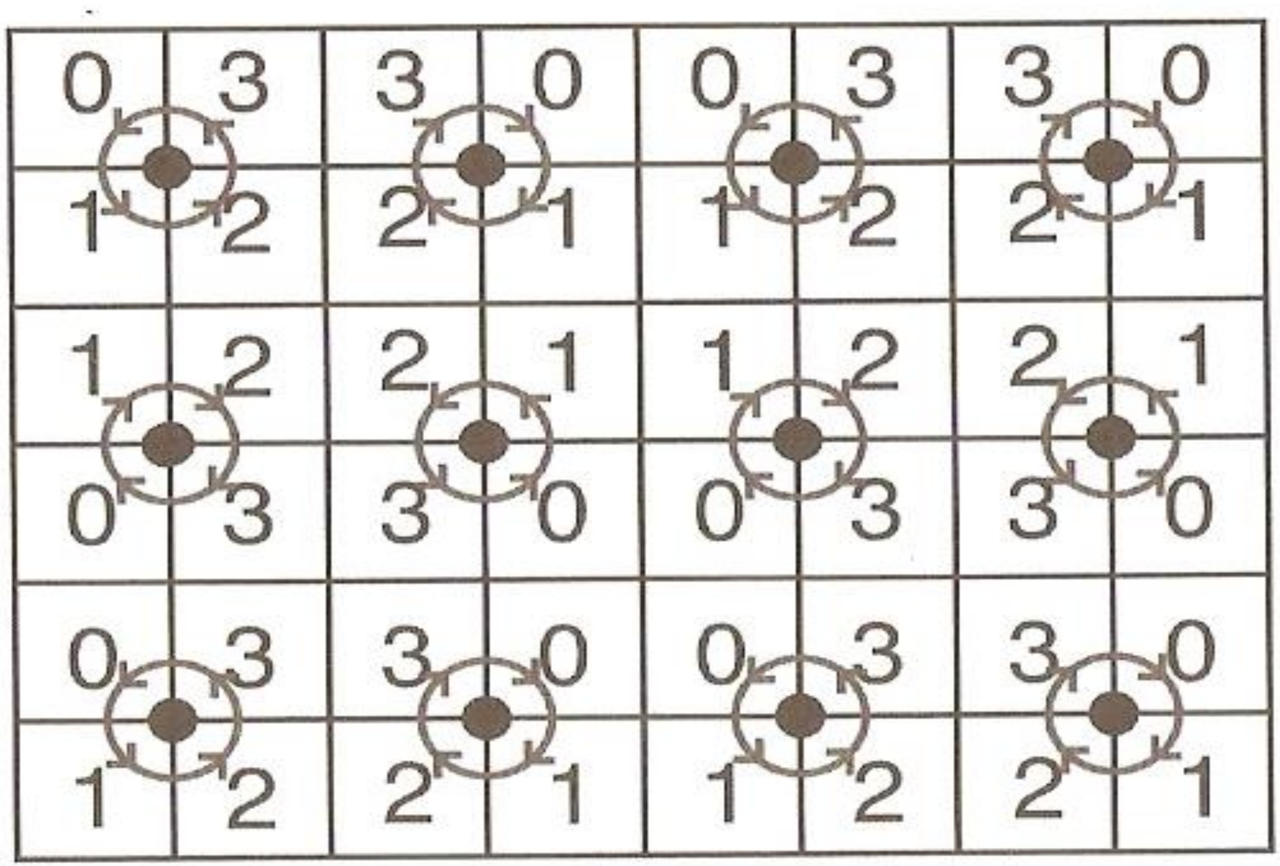


Temos.....



Mais uma surpresa!!!!

Além de ser um **retângulo "mágico"**, temos que a volta de cada um dos pontos da grelha, é alternadamente no sentido horário e anti-horário; e que em cada quadrado formado por quatro pontos vizinhos da grelha, temos sempre quatro números iguais.



Descobertas....

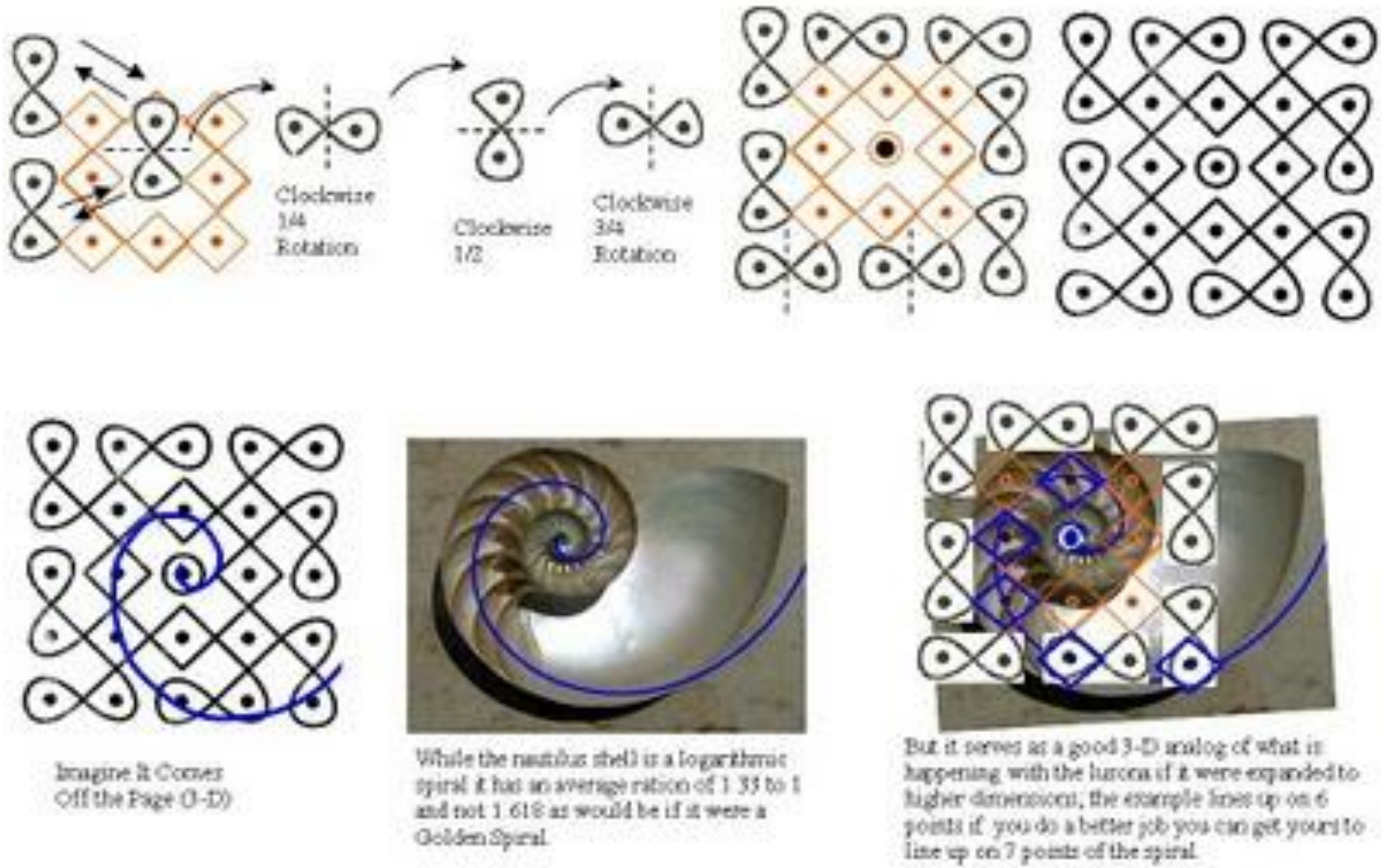
Ainda temos muitas descobertas realizadas por Gerdes, envolvendo mosaicos, fractais e matrizes cíclicas.

Nesse minicurso, desenvolvemos uma pequena introdução dos seus estudos na África.

Referências

GERDES, Paulus. Da etnomatemática a arte-design e matrizes cíclicas. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

Para complementarmos, esse exemplo não foi retirado do livro “Da etnomatemática a arte-design e matrizes cíclicas”, mas pensando em rotações, vejamos que interessante.......



http://2.bp.blogspot.com/_8-EXGSjCbFo/S4B8wDPfjLI/AAAAAAAAAhc/Uf2fUc5p5FI/s400/lucona+nautilus+assembly.jpg

Alguns vídeos interessantes

- http://www.youtube.com/watch?v=hdlWKuzkgSo **(Cikku kolam.......... by Chantal Jumel)**
- http://www.youtube.com/watch?v=X9pEdDTOZ1w **(Tartaruga)**
- http://www.youtube.com/watch?v=pIurbbmJv6Y **(Simple Lusona)**