X SEMAT 2023

SEMANA ACADÊMICA DE MATEMÁTICA
UTFPR - TD

ISSN: 2358-4947

ANAIS
X SEMANA DA MATEMÁTICA
UTFPR TOLEDO

O Ensino de Matemática e as mudanças curriculares na Educação Básica

Página do Evento:

http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/X_semat/

Toledo – PR

Maio - 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Carla Rech Ribeiro CRB 9/1685
Biblioteca UTFPR / Toledo

Sumário

1. Introdução

A Semana da Matemática da UTFPR – Toledo (SEMAT) iniciou no ano de 2013 e estará, em 2023, na sua X edição, cujo tema discutirá “O Ensino de Matemática e as mudanças curriculares na Educação Básica”. A programação foi desenvolvida de forma presencial e remota.

O evento surgiu com o intuito de complementar a formação dos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática, que tem como preocupações preparar o acadêmico para o exercício do magistério no Ensino Fundamental e Médio, bem como formar pesquisadores, com atitudes críticas e reflexivas nas áreas de Educação Matemática, Matemática Aplicada e Matemática Pura. O evento promoveu a integração entre acadêmicos, professores de Matemática e pesquisadores permitindo aos profissionais socializar suas práticas pedagógicas, divulgar suas pesquisas e promover a formação continuada por meio de minicursos, palestras e comunicações orais.

Participam do evento os acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR – Câmpus Toledo e de outras instituições de Ensino Superior, professores do Ensino Fundamental e Médio das redes pública e privada de ensino, professores universitários e pesquisadores, não apenas da região, mas também de outros estados do Brasil.

A SEMAT está em sua décima edição, indicando uma consolidação na realização do evento, sendo esperado, principalmente, pelos acadêmicos do curso e docentes da região. A cada ano contamos com a participação de mais alunos e docentes de instituições da região de Toledo, como é o caso de instituições de Assis Chateubriand, Cascavel, Foz do Iguaçu, Francisco Beltrão, Palotina, Pato Branco, etc.

Vários temas já foram discutidos e abordados nas semanas da matemática anteriores: “A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão” (V SEMAT – 2017), “A Matemática na Harmonia da Natureza” (IV SEMAT – 2016), “A matemática e seus caminhos: vencendo limites” (III SEMAT – 2015), “Matemática em foco: integrando saberes, compartilhando experiências” (II SEMAT – 2014) e “Perspectivas do Ensino e da Pesquisa em Matemática” (I SEMAT – 2013).

Levando em consideração o contexto tecnológico em que vivenciamos e as características de nossa instituição, primeira universidade tecnológica do país, pensamos ser pertinente abordar na X SEMAT a temática: "O Ensino de Matemática e as mudanças curriculares na Educação Básica".

A agenda do evento contou com a palestra de abertura ministrada pelo Prof. Marcione Miguel Zini (SESI – Cascavel) que falou sobre Tecnologias na Educação Básica: Potenciais e desafios da robótica em sala de aula.

No segundo dia do evento, ocorreram as sete oficinas.

No terceiro dia do evento, foram realizadas duas Mesas de Discussões: Mesa 1 - Gamificação e Pensamento Computacional (presencial), com a Profa. Dra. Vanessa Lucena Camargo de Almeida Klaus (UNIOESTE - FOZ DO IGUAÇU) Prof. Ms. Alex Morgenroth (SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO - TOLEDO) e Mesa 2 - Novo Ensino Médio nas diferentes escolas (presencial), com o Prof. Esp. Carlos Eduardo Goettems (SEED - COLÉGIO ESTADUAL JARDIM PORTO ALEGRE - TOLEDO) Profa. Ms. Louvane Rosigler Bringmann (SEED - COLÉGIO ESTADUAL MORAES REGO - TOLEDO) Prof. Esp. Odair Teixeira de Goes (SEED - COLÉGIO ESTADUAL ANTÔNIO JOSÉ REIS - TOLEDO).

No quarto e último dia do evento, foi realizada a apresentação de trabalhos por meio de comunicações orais. No encerramento da semana acadêmica, foi realizado do VII SARAU da Matemática com apresentações artísticas e culturais de toda a comunidade acadêmica.

2. Objetivos

- Promover a integração e a capacitação de alunos e professores, bem como da comunidade acadêmica local e regional, a partir da discussão de temáticas atuais e da realização de oficinas com temas matemáticos pertinentes.
- Discutir a formação docente de Matemática à luz da BNCC com suas políticas, práticas e tendências.
- Oportunizar atividades que relacionem conteúdos estudados em sala de aula com experiências profissional de professores e pesquisadores, visando complementar a formação dos acadêmicos.
- Refletir sobre uso das tecnologias digitais para o ensino/aprendizagem da matemática;
- Promover discussões teóricas sobre ações, concepções, pesquisas e fundamentos da Matemática, em suas diferentes áreas;
- Viabilizar o intercâmbio e a divulgação de investigações e produção científica nas áreas da matemática, assim como experiências educacionais realizadas nesse contexto.
- Promover a inclusão social para pessoas com deficiência visual por meio do Ensino da Matemática.
- Incentivar a divulgação das pesquisas realizadas por discentes e docentes nos diversos níveis e áreas da Matemática.

3. Público Alvo

Graduandos, pós-graduandos e profissionais das áreas de Educação, Educação Matemática, Matemática Pura, Matemática Aplicada e Estatística.

4. Período de Realização

O evento foi realizado nos dias 02 a 05 de maio de 2023.

5. Periodicidade do Evento

Esta foi a X Semana da Matemática do Câmpus da UTFPR Toledo, cuja periodicidade se dá anualmente.

6. Realização

O evento foi realizado pela Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) sob a responsabilidade da comissão organizadora.

6.1. Comissão Organizadora

Prof. Dr. Leandro Antunes - **Coordenador da SEMAT**

Profa. Ms. Heloìsa Cristina da Silva

Profa. Dra. Jocelaine Cargnelutti

Prof. Dra. Regiane Slongo Fagundes

Prof. Dr. Renato Francisco Merli

Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan

Prof. Dr. Sérgio Flávio Schmitz

Prof. Dra. Suellen Ribeiro Pardo Garcia

Prof. Dr. Vanderlei Galina

6.2. Comissão de Apoio

Adriano Alfredo Schneider

Daiane Luisa Stahlhofer

Felipe Oliveira

Felipe Rodrigues

Kauana Tomasi

Kellen Andressa de Oliveira Niehues

Nilson Liberato Neto

6.3. Comissão Científica

Profa. Dra. Jocelaine Cargnelutti – Coordenadora

Prof. Dr. Vanderlei Galina – Coordenador

6.4. Comissão de Pareceristas

Profa. Dra. Jocelaine Cargnelutti – **Coordenadora**
Profa. Dr. Vanderlei Galina – **Coordenador**
Profa. Ms. Aline Keryn Pin
Profa. Dra. Aracéli Ciotti de Marins
Prof. Dr. Cezar Ricardo de Freitas
Profa. Dra. Daniela Trentin Nava
Profa. Dra. Dione Inês Christ Milani
Prof. Dr. Emerson Tortola
Prof. Dr. Gustavo Henrique Dalposso
Prof. Ms. Heloìsa Cristina da Silva
Prof. Ms. Ivan José Coser
Profa. Dra. Jahina Fagundes de Assis Hattori
Profa. Dra. Karen Carrilho da Silva Lira
Prof. Dr. Leandro Antunes
Prof. Ms. Loreci Zanardini
Profa. Dra. Marcia Regina Piovesan
Prof. Dr. Renato Francisco Merli
Profa. Dra. Regiane Slongo Fagundes
Prof. Dr. Robson Willians Vinciguerra
Prof. Dr. Rodrigo Manoel Dias Andrade
Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan
Profa. Dra. Rosângela Aparecida Botinha Assumpção
Profa. Dra. Suellen Ribeiro Pardo Garcia
Profa. Dra. Vanessa Largo
Prof. Dr. Wilian Francisco de Araujo

7. Cronograma

Data	Horário	Programação	Local
02/05/2022	19:00 – 22:30	Solenidade e Palestra de Abertura	UTFPR
03/05/2022	19:00 – 23:30	Oficinas	UTFPR
04/05/2022	19:00 – 22:30	Mesas de Discussões	UTFPR
05/05/2022	19:00 – 22:30	Comunicações Orais e VII sarau	UTFPR

8. Oficinas

A X SEMAT contou com a apresentação de sete oficinas das áreas de Educação, Educação Matemática, Matemática Pura e Matemática Aplicada, que foram ministrados por docentes da UTFPR e outras instituições.

OFICINA [01] – Introdução ao R na nuvem.
Responsável: Prof. Ms. Amilton Luciano Garcia da Silva (UNIOESTE - Cascavel).

OFICINA [02] - Matemática e Educação Financeira na Tomada de Decisões .
Responsáveis: Prof. Dr. Sérgio Flávio Schmitz (UTFPR - Toledo).

OFICINA [03] - A abordagem STEAM: o uso do LEGO como ferramenta de ensino de Matemática, Física e Robótica.
Responsáveis: Prof. Esp. Jackson Luis Wille (PHOENIX - Cascavel e Marista Social – Cascavel.

OFICINA [04] - Transformando Dados em Conhecimento: ensino de Estatística na Educação Básica.
Responsável: Prof. Dr. Pablo Chang (INCOMAR - Toledo e PHOENIX - Cascavel).

OFICINA [05] - Matemática em 3D com o Blender
Responsável: Prof. Esp. Valdecir Neumann (UTFPR - Toledo);

OFICINA [06] - Resolução de Problemas Abertos de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental (gratuito aos professores da Educação Básica de Toledo - SMED).
Responsável: Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan (UTFPR - Toledo);

OFICINA [07] - A geometria em espaços de dimensão infinita.
Responsável: Prof. Dr. Leandro Antunes (UTFPR - Toledo).

9. Trabalhos

Nesta nona edição da SEMAT, alunos, docentes e pesquisadores da UTFPR e de outras instituições de ensino submeteram resumos expandidos e trabalhos completos, que foram apresentados na modalidade de comunicação oral e/ou pôster.

Na sequência, são apresentados os trabalhos completos apresentados.

UTILIZAÇÃO DE JOGOS DIDÁTICOS NO ESTÁGIO SUPERVISIONADO NA EDUCAÇÃO BÁSICA 2

Victor Fernando Casarotto
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
victor.casarotto@hotmail.com

Heloisa Cristina da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
heloisasilva@utfpr.edu.br

Resumo

O estágio supervisionado na educação tem papel fundamental na formação dos professores, através da prática, os estudantes podem aplicar seus conhecimentos. É nesse momento da formação em que podemos aplicar as teorias e perceber seus reflexos na prática de sala de aula ou em outros espaços. Este trabalho apresenta o relato da experiência da aplicação do jogo Batalha das Operações no contexto de uma oficina de matemática que foi parte integrante da disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica 2. O jogo tinha como objetivo trabalhar as quatro operações fundamentais para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Ao final do desenvolvimento da oficina pudemos perceber que os alunos se sentiram motivados a participar do jogo e concluímos que disciplinas como didática e estágio são bastante importantes na formação inicial de professores por possibilitarem a aplicação e análise de teorias quando colocadas na prática de sala de aula.

Palavras-chave: Oficinas de matemática. Jogos. Estágio Supervisionado na Educação Básica.

1 Introdução

Esta pesquisa o relato da experiência de aplicação de uma oficina de matemática desenvolvida na disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica II, na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), à qual temos contato com alunos do Ensino Fundamental, através de oficinas, observações e regências.

O estágio obrigatório no Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, Toledo, é composto de quatro disciplinas. Na primeira disciplina o foco principal é conhecer o ambiente escolar, seja do ponto de vista da gestão, pela leitura e análise de documentos como o Projeto Político Pedagógico do colégio; como do ponto de vista da sala de aula, por meio de observações de certa carga horária de aulas dos anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. A disciplina de estágio 2, é caracterizada pelo início das regências. É nesse momento que o aluno, além de observar turmas dos anos finais do Ensino Fundamental, também atua como regente em duas turmas de mesmo ano por um período de aproximadamente uma semana e meia. O estágio 3 tem características bastante semelhantes ao estágio 2, porém a atuação acontece no Ensino Médio. Por fim, no estágio

4, as observações e regências acontecem na Educação de Jovens e Adultos (EJA), escola do campo, anos iniciais do Ensino Fundamental, entre outras categorias diferentes daquelas que compõem os estágios 2 e 3.

Além das atividades no horário regular das aulas nos colégios, em todos os estágios são desenvolvidas oficinas de matemática. No segundo semestre de 2022, estas oficinas aconteceram em uma manhã de sábado na UTFPR, Toledo. Os alunos do estágio 1 auxiliam na elaboração de materiais para a oficina em que atuará como monitor e como monitores no dia da aplicação da oficina, pois neste estágio a intenção não é a regência. Já os alunos dos estágios 2, 3 e 4 são os responsáveis pela elaboração das oficinas, tendo como responsabilidade definir o tema da oficina, conteúdos, plano de aula, definição de elaboração dos materiais que serão utilizados na oficina.

Neste contexto, elaboramos o jogo Batalha das Operações visando trabalhar com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, pois estávamos cursando a disciplina de Estágio Obrigatório da Educação Básica 2. Esta oficina foi elaborada e desenvolvida por três alunos do estágio 2, em que um desses alunos é o primeiro autor deste relato e a professora orientadora e responsável pela disciplina de estágio 2, é a segunda autora.

Com as oficinas e a utilização de jogos, temos uma forma de apropriação de conhecimento mais atrativa aos alunos, deixando mais motivados a aprender, sendo um método de ensino que traz resultados positivos. O jogo Batalha das Operações tem como tema as quatro operações, ou seja, soma, subtração, multiplicação e divisão.

Ao final da disciplina de estágio 2, percebemos o quão importante são as disciplinas de didática na formação de docentes e a inserção de alunos de licenciatura nas escolas, através das disciplinas de estágio.

2 Oficinas de matemática

As oficinas de matemática podem ser uma boa maneira de desenvolver conteúdos de matemática de maneira mais atrativa para os alunos. Afinal, em uma oficina temos um problema a resolver que requer competências, o emprego de ferramentas adequadas e às vezes, improvisação. Requer trabalho em equipe, ação e reflexão (DA TRINDADE, 2019).

O uso de atividades que conciliam teoria e prática são uma maneira interessante de mostrar aos alunos aquilo que normalmente falamos em sala de aula, de maneira abstrata. Além disso, através das oficinas, podemos observar não apenas os resultados, mas os processos que o aluno faz.

Um dos recursos que podemos utilizar nas oficinas são os jogos. Os jogos podem ser uma forma de trazer algo que faz parte do cotidiano dos alunos, podendo auxiliar no processo de aprendizagem. A utilização de jogos contribui com as reflexões, construções e generalização de conceitos. Os alunos se sentem valorizados, pois cada aluno tem sua parcela de participação (DA COSTA, GUERATO, 2012). Segundo Deodato (2012), a utilização de jogos e materiais manipuláveis são frequentes nas oficinas, ajudam a formularem e testarem suas conjecturas mais livremente, encontram mais espaço para validar as suas ideias, contribuindo para a compreensão da oficina. A dinâmica de sala de aula se modifica quando se trabalha com jogos, pois naturalmente incentivam o diálogo, a autonomia, a socialização de ideias, entre outras características importantes para a aprendizagem.

Os jogos podem ser utilizados em diversos momentos do desenvolvimento do conteúdo. Um dominó de frações pode ser uma maneira mais atrativa de revisar o conteúdo para uma avaliação. Outra possibilidade é o uso de jogos para introdução de conteúdo, como por exemplo, o jogo Senha, que pode ser utilizado para introduzir conceitos de análise combinatória.

Neste trabalho, elaboramos o jogo Batalha das Operações. Na próxima seção detalharemos as regras do jogo.

3 Regras do jogo

O jogo Batalha das Operações foi elaborado como parte da disciplina de estágio supervisionado para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. O objetivo era revisar as quatro operações pois imaginamos que os alunos tenham dificuldades em realizá-las. Dessa forma, o jogo é mais adequado para revisão de conteúdo.

A Batalha das Operações consiste em um tabuleiro (Figura 1) composto por 50 casas, cada uma delas com uma das operações matemáticas: adição, subtração, multiplicação e divisão (+, -, ×, ÷) ou um quadrado negro (■).

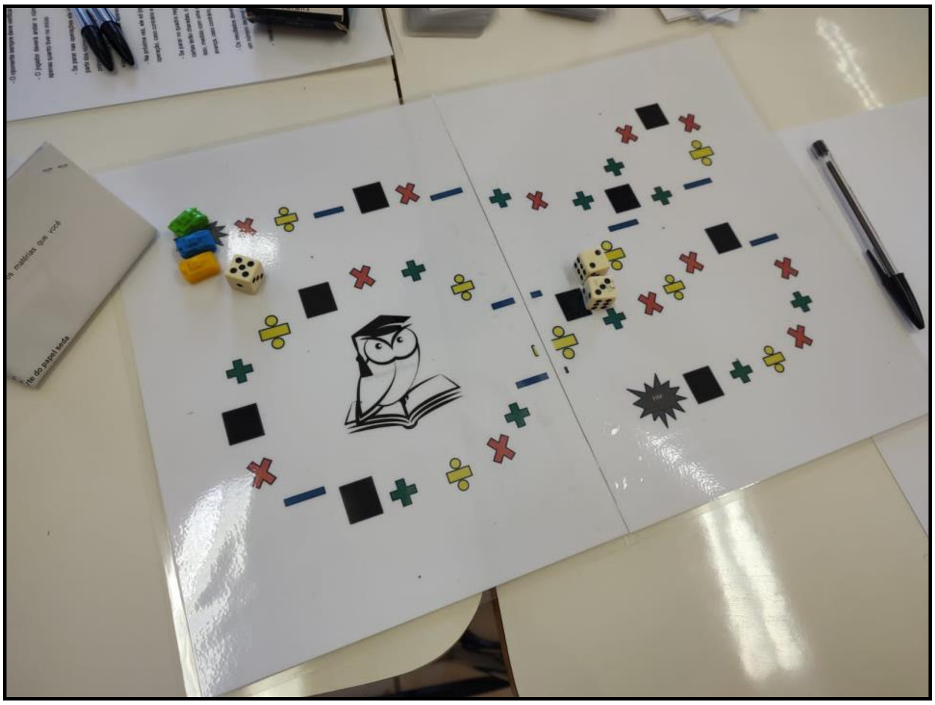


Figura 1: Tabuleiro do jogo Batalha das Operações.
Fonte: Autores, (2022).

O jogo consiste em uma ampulheta, um tabuleiro, pinos, três dados e 52 cartas de “charadas”. O aluno deve lançar um dado que determinará a quantidade de casas. Quando estiver em um símbolo de uma das operações, o aluno deve jogar dois dados e deverá efetuar a operação indicada na casa em que está com o seu pino, sempre utilizando primeiro o maior número para realizar a operação. Exemplo: o aluno tem seu pino em uma casa com o símbolo de subtração, joga os dados e os números são 4 e 2. Então deve realizar o cálculo: $4 - 2$. Quando o aluno acerta o valor, joga um dos dados e anda o número de casas indicado no dado. Quando erra, ele joga um dos dados e volta o número de casas que apareceu no dado. Os resultados deverão ser apenas números naturais, e caso o resultado seja um número decimal deverá ser considerado apenas a parte inteira. Essa regra de considerar somente a parte inteira na divisão pode ser modificada quando se trabalha com alunos que conseguem realizar a divisão com casas decimais. Na situação em que o aluno parar em um quadrado negro, deve retirar uma carta do monte “Charadas”. Respondida a charada o aluno jogará um dado e avançará a quantidade de casas indicada no dado se a resposta estiver correta ou retornará, se a resposta estiver errada. As charadas são compostas de perguntas que não têm relação com o conteúdo matemático que está sendo abordado no jogo. A intenção dessas cartas é tornar o jogo mais divertido. No Quadro 1 apresentamos algumas charadas presentes no jogo.

Quadro 1 – Exemplos de cartas charada.

Charada O que é o que é? De dia fica no céu e á noite fica na água? R: 4	Charada O que é o que é? É cheio de buracos, mas segura a água? R: 3	Charada Quem foi a primeira pessoa a dizer que os homens são todos iguais? R: 2	Charada O que atravessa o rio e não se molha? R: 1
Charada O que tem mais de 3 olhos e menos que 4? R: 8	Charada Por que a galinha não sabe andar na cidade grande? R: 7	Charada Qual o super-herói mais religioso de todos? R:6	Charada O que é o que é? Cai e fica em pé? R: 5

Fonte: Autores, (2022).

Para as cartas charadas há dois montes, um em que estão as charadas e outro em que estão as respostas. Dessa forma, os valores no final da carta charada indicam o número da carta em que está a resposta da charada. Um exemplo dessa situação é a charada “O que é o que é? É cheio de buracos, mas segura a água?”, a resposta está na carta número 4, “A esponja”. Vence o jogo quem chegar na casa “fim”.

4 Relato da experiência

A oficina em que aplicamos o jogo Batalha das Operações foi realizada na UTFPR em um sábado. Nosso público-alvo foram alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, divididos em dois grupos, o primeiro com alunos do 8º e 9º anos e o segundo grupo, alunos do 6º e 7º anos.

No momento da aplicação da oficina algumas modificações foram realizadas. A intenção era que em cada mesa houvesse um vencedor, juntaríamos os vencedores de cada mesa para formar novas disputas para que ao final tivéssemos um vencedor da sala e premiação para os três primeiros colocados. Porém, como nas regras havíamos pensado em um aluno atuar como juiz, precisaríamos que em cada mesa houvesse mais que uma disputa, para dar possibilidade de que qualquer um dos três alunos fosse o vencedor da mesa. Como precisaríamos de um tempo maior, decidimos por separar a turma em grupos de três alunos, em que todos eles jogavam (Figura 2). Assim, não tivemos a figura do juiz. Dessa forma, os cálculos de cada aluno eram verificados por um dos outros jogadores usando a calculadora.

Figura 2: Aplicação da oficina[1].
Fonte: Autores, (2022).

Quando decidimos separar os alunos do 6º e 7º anos em uma aplicação e os alunos do 8º e 9º em outra, havíamos pensado em deixar os alunos do 8º e 9º realizarem a divisão com uma ou duas casas decimais. Porém, no momento da aplicação da oficina não conversamos com os alunos sobre essa questão da divisão. Dessa forma, mesmo os alunos do 8º e 9º anos realizaram as divisões, quando necessário, considerando somente a parte inteira.

Na aplicação da oficina com os 8º e 9º anos, conseguimos realizar o campeonato. Em cada mesa havia um vencedor que disputava com um vencedor de outra mesa, formando duplas. Ao final foi possível encontrar um vencedor da sala e a premiação para os três melhores jogadores. No caso da turma dos 6º e 7º anos, não foi possível realizar o

[1] Rostos desfocados, devido a norma de comissão de ética.

campeonato, por falta de tempo. Dessa forma, para encontrar o vencedor e os três melhores para a premiação, a estratégia adotada foi retirar a sorte no dado.

5 Considerações Finais

Diante de todas as dificuldades enfrentadas no ensino, o professor deve sempre encontrar maneiras de motivar seus alunos. Uma maneira que pode ajudar, é a utilização de jogos. Uma dificuldade de aprendizagem pode estar relacionada à metodologia, os jogos ajudam esses alunos, além de deixá-los curiosos e motivados.

Com a nossa decisão de utilizar jogos na oficina, podemos fortalecer a ideia de que os jogos são importantes para um bom ensino aprendizagem, grande parte dos alunos se interessaram pela aula e ficaram tristes quando a oficina chegou ao fim.

Como estamos em formação acadêmica, percebemos como é importante participar de disciplinas de estágio, além das disciplinas de didática, que mostram que devemos aprender como o aluno aprende, ou seja, como ensinar de forma cada vez mais eficaz.

Os jogos utilizados na oficina trazem à tona a importância de planejar uma aula diferente, ajudam a construir um espaço lúdico favorecendo um ambiente com mais diálogo, auxiliando a aquisição e retenção de conhecimentos, desenvolvendo habilidades, auxiliando no processo de ensino aprendizagem.

É no estágio que o acadêmico, percebe a possibilidade de utilizar os conhecimentos teóricos na prática. É uma experiência única que dá significado à formação docente.

REFERÊNCIAS

COSTA, L. C. da; GUERATO, E. Jogos pedagógicos & oficinas: uma parceria nas aulas de Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [S. l.], v. 3, n. 3, p. 304–313, 2012. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/395. Acesso em: 13 abr. 2023.

BARROS DA TRINDADE, A. K.; ARAUJO JUNIOR, F. DE P. S. DE. Oficinas de matemática uma maneira de ensinar probabilidade e estimativa. **Revista Encantar**, v. 1, n. 3, p. 119-126, 31 dez. 2019. Disponível em: https://itacarezinho.uneb.br/index.php/encantar/article/view/8194. Acesso em: 13 abr. 2023.

DEODATO, A. A. **Matemática no projeto escola integrada: distanciamentos e aproximações entre as práticas das oficinas e as práticas da sala de aula.** 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, 2012. Disponível em: http://hdl.handle.net/1843/BUOS-966F8R. Acesso em: 13 abr. 2023.

CRIAÇÃO DE MATERIAIS DIDÁTICOS UTILIZANDO A IMPRESSORA 3D PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA INCLUSIVA

Victor Fernando Casarotto
UTFPR
victor.casarotto@hotmail.com

Vanessa Largo Andrade
UTFPR
vanessalargo@utfpr.edu.br

Aline Keryn Pin
UTFPR
alinepin@utfpr.edu.br

Renato Francisco Merli
UTFPR
renatomerli@utfpr.edu.br

Resumo

O presente artigo objetiva descrever uma experiência na confecção de um material manipulável adaptado a partir do Multiplano. Para isso, uma discussão sobre o entendimento de educação inclusiva e materiais manipuláveis foi realizada. Depois foi descrito o projeto Licenciando, contexto no qual o texto está inserido. Por fim, o processo de desenvolvimento do material foi descrito e as peças confeccionadas são apresentadas. A partir dessa experiência é possível afirmar que o uso de ferramentas tecnológicas voltadas para a criação de materiais contribui para melhoria e adaptação de materiais que, inicialmente não haviam sido pensados para atender as necessidades específicas de alunos inclusos.

Palavras-chave: Materiais Manipuláveis. Educação Matemática Inclusiva. Ferramentas tecnológicas. Multiplano.

1 Introdução

O ensino de matemática tem diversos desafios a serem enfrentados. Entre eles, está um ensino pautado nos pressupostos de Educação Inclusiva, na qual os professores devem ensinar a partir das necessidades específicas de seus alunos. Outro desafio que os professores têm enfrentado é a utilização de ferramentas tecnológicas para elaborar e adaptar materiais manipuláveis.

Nesse contexto, o presente artigo tem como objetivo descrever uma experiência na produção de materiais manipuláveis voltados para educação matemática inclusiva utilizando ferramentas tecnológicas de criação e impressão de modelos 3D.

Nas duas próximas seções apresentamos nossa perspectiva de educação inclusiva e material manipulável, respectivamente. Na sequência discutimos o projeto Licenciando, o qual este texto está vinculado e, por fim, descrevemos o processo de desenvolvimento do material manipulável.

2 Educação inclusiva

Por volta do século XX, os ambientes educacionais organizavam as classes a partir do resultado de teste de inteligência, seguindo o critério do quociente intelectual (QI)[1], desta forma os alunos eram separados entre as classes A, B, ... E, em que os melhores resultados eram alocados nas primeiras classes, assim sucessivamente. Deste modo,

> [....] as classes D e E foram chamadas Classes Especiais. Nelas, foram colocados os excepcionais de toda a espécie, que frequentavam **(sic)** a escola pública: retardados mentais, deficientes sensoriais, e de linguagem, crianças com distúrbios de motricidade, orgânicos (classe D) e com desvios de comportamento (Classe E) (BOLETIM N. 14 PUBLICAÇÃO apud KASSAR, 2011, p.66).

Com a Constituição Federal de 1988, todos têm direito a educação pública de qualidade e ao programa de integração social, mas a Educação Especial ainda está vinculada a instituições articulares como as APAEs e a Sociedade Pestalozzi. Em 1993, o Brasil como signatário da Conferência Mundial sobre Educação para Todos, elaborou o Plano Decenal de Educação para Todos, que tinha como objetivo, assegurar a aprendizagem de conteúdos mínimos para todos os brasileiros.

Em 1994, ocorreu em Salamanca, na Espanha a Conferência Mundial sobre Necessidades Educativas Especiais: acesso e qualidade, teve como fruto uma declaração com a designação de que as instituições comuns deveriam “[...] acolher todas as crianças independentes de suas condições físicas, intelectuais, sociais, emocionais, linguísticas ou outros” (KASSAR, 2011, p. 71). O Brasil novamente como signatário das políticas internacionais, promulga a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, em 1996, com a proposta de que as escolas públicas deveriam se adequar para atender a todas as crianças.

Em 2003, o Governo Federal, a partir da implementação da política de “Educação Inclusiva”, redirecionou uma educação integrativa, para uma educação inclusiva, estabelecendo que todas as crianças deveriam ser matriculadas em salas de aula comuns de escolas públicas e, para aquelas que necessitassem, teriam acompanhamento por meio do Atendimento Educacional Especializado (AEE), realizado prioritariamente, em salas de recursos multifuncionais.

[1] É o quociente de uma fração que tem por numerador o produto da idade mental por 100, e por denominador a idade cronológica (NEIVA, 1996, p. 47).

A Educação Inclusiva se refere aos desafios de incluir na sala de aula convencional alunos com deficiência, alunos com transtornos globais de desenvolvimento e alunos com altas habilidades ou superdotação. Esses desafios, conforme aborda Skovsmose (2019), envolvem uma educação que deve ir além das diferenças, em que não se deve apenas incluir os deficientes na "normalidade", mas pensar em estabelecer encontros entre as diferenças. (SKOVSMOSE, 2019).

Devemos desenvolver ambientes escolares com foco na investigação inclusiva, de modo que que todos os alunos trabalhem nas mesmas tarefas e que haja preocupação por parte dos envolvidos, como equipe pedagógica e professores, com o uso de materiais apropriados para o acesso dos alunos. Isso pode ser construído segundo Frant (2022), a partir da disponibilização de representações de ideias matemáticas de forma multissensorial, por meio de sons, cores, músicas e texturas, além das ferramentas tecnológicas, e é nesse sentido, que desenvolvemos o material didático, por meio da impressora 3D para a utilização em aulas de matemática que visam trabalhar com escala e área.

3 Material didático manipulável

Na busca por melhoria do ensino e da aprendizagem, a manipulação dos materiais didáticos surge como alternativa para melhor compreensão dos conteúdos matemáticos. Desta forma, as aulas se tornam práticas e alegres, fazendo com que os alunos passem a gostar mais de matemática (SCOLARO, 2008).

O uso de materiais manipuláveis torna possível manipular, tocar, sentir e movimentar o que seria apenas uma representação de ideias pois para muitos alunos, a manipulação é o significado do objeto matemático (SCOLARO, 2008).

Estes materiais tornam as aulas de matemática mais dinâmicas e compreensíveis, aproximando a teoria da prática; por meio de ação manipulativa, o aluno aprende fazendo. O professor tem um papel importante no sucesso escolar do aluno, além de ter o material didático, é importante que saiba manipulá-lo corretamente. Por este motivo nos cursos de formação de professores, os futuros professores são levados à reflexão sobre a utilização dos materiais didáticos (COELHO, SCHEID 2012).

4 O Projeto Licenciando

Os resultados apresentados neste trabalho são decorrentes das atividades desenvolvidas durante a execução do projeto Licenciando, vinculado a Universidade Tecnológica Federal do Paraná e contemplado por meio do Edital 43/2022 PROGRAD, no ano de 2022,cujo um dos objetivos foi a elaboração de materiais didáticos para o ensino de alunos apoiados na Educação Especial, dentro de uma perspectiva inclusiva de ensino de matemática.

Tivemos como primeira ação do projeto, a catalogação de planos de aula de oficinas produzidas ao longo dos anos pelos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática. Após a catalogação, foram selecionados quatro planos com o objetivo de adequá-los, por meio de novas propostas didáticas que contemplem a diversidade, buscando a criação de materiais inclusivos.

Para a fundamentação e melhor compreensão sobre o ensino de matemática em uma perspectiva inclusiva, realizamos estudos de artigos científicos na área da Educação Matemática Inclusiva, com foco no ensino de matemática para alunos com deficiência visual e auditiva. Vislumbramos a partir desses estudos a importância em se fazer adaptações que incluíssem todos os alunos.

De acordo com Autor (ANO), em seu artigo *O que acontece quando passamos uma atividade matemática da tinta ao Braile,* percebemos que, em algumas adaptações, podem ocorrer equívocos como omissões, adições e até mudança de palavras, como podemos observar na Figura 1. Esses equívocos não proporcionam aos alunos uma compreensão adequada sobre o que a atividade propõe, ou quais os conceitos matemáticos que devem ser empreendidos para o desenvolvimento da mesma. Tais pontos nos levaram a refletir sobre a importância do projeto.

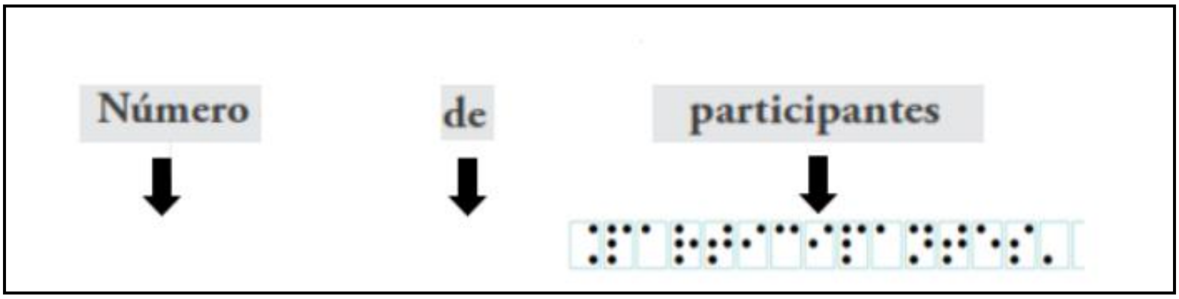


Figura 1 – Atividade adaptada para o braile
Fonte: Mercado e Baraldi (2020)

Na segunda etapa, após catalogarmos e organizarmos os planos das oficinas já existentes do curso de licenciatura, escolhemos o plano intitulado *Um dia no museu*[2], com o

[2] Oficina realizada pelos estágiarios (Francielli Aparecida de Araújo, Jose Augusto de Souza e Vinícius Franco Vasconcelos) em 2017, na disciplina de estágio supervisionado na educação básica 2.

conteúdo de escala, ângulos e operações fundamentais, atividade retirada do livro *Matemática - Projeto Teláris* (DANTE, 2013).

Se trata de um problema de troca de câmeras, em que o aluno precisa organizar as paredes do museu para ter o melhor aproveitamento de área e o menor custo com câmeras. As paredes fixas estão em linhas continuas enquanto as removíveis em linhas pontilhadas, como mostra a Figura 2.

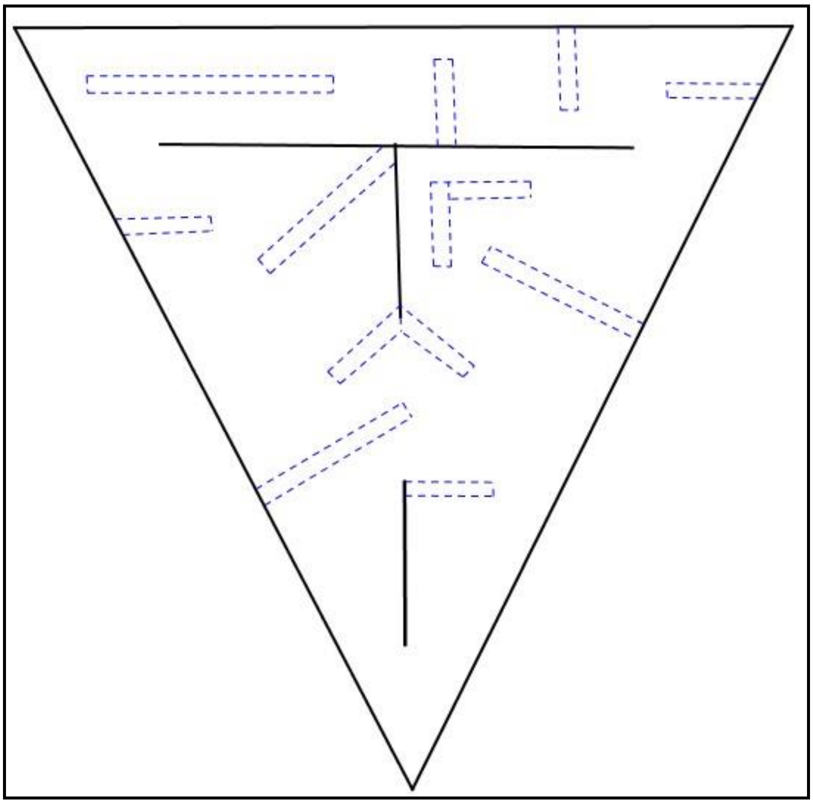


Figura 2 – Atividade *Um dia no Museu*
Fonte: Dante (2013)

Adaptamos este plano de oficina, a partir de um olhar da Educação Matemática Inclusiva, a proposta do plano era a utilização da folha, ou até a construção de algo de papelão, nós pensamos em utilizar o multiplano. Ao final, um material manipulável foi desenvolvido. Na sequência, apresentaremos como foi a produção deste material.

5 Produção do material

Para a produção do material foram utilizadas duas impressoras 3D, do modelo Creality Ender-3 v. 2[3], as quais pertencem ao curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR – campus Toledo.

A modelagem 3D do material envolveu a aquisição de conhecimentos sobre o manuseio da impressora, além dos softwares necessários para a criação destes materiais didáticos, o Fusion 360[4]. Para a transformação do arquivo do objeto modelado (.stl) em um arquivo legível (g-code) pela impressora, foi utilizado o Ultimate Cura (trazer uma nota de rodapé).

Primeiramente, utilizando o Multiplano e as peças existentes nele, montamos a figura geométrica utilizada nas atividades do plano de aula (Figura 3). A partir disso, discutimos como deveria ser realizada a modelagem do material.

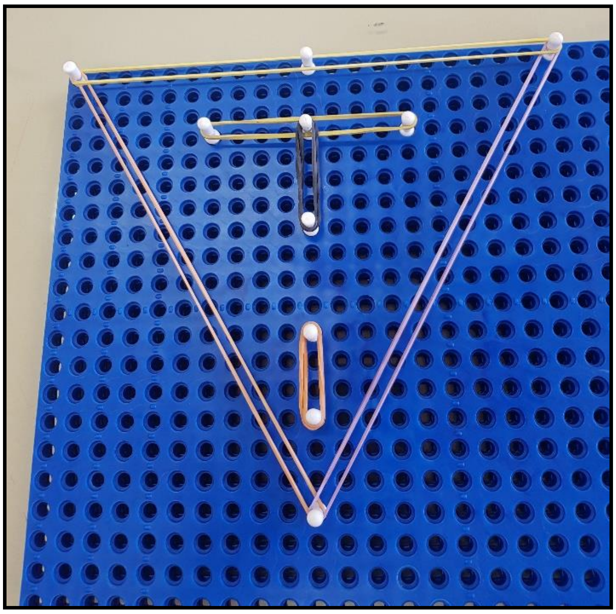


Figura 3 – Atividade montada com o multiplano.
Fonte: da pesquisa

O material que foi adaptado pode ser visto na Figura 4. É possível perceber que confeccionamos no lugar dos elásticos, barras contínuas, de modo a permitir ao estudante com deficiência visual, uma experiência tátil mais apurada. Escolhemos confeccionar barras

[3] Maiores informações podem ser encontradas no link do site da fabricante: https://www.crealitystore.com.br/impressora-3d-creality-ender-3v2-1001020246.
[4] Disponível para download em <Fusion 360 | Software CAD 3D, CAM, CAE e PCB na nuvem | Autodesk>.

contínuas no lugar dos elásticos para evitar que no momento do manuseio os elásticos sejam movidos, modificando de certa forma a imagem.

O intuito será a realização de oficinas em escolas para que esse material seja utilizado por estudantes cegos, os quais ainda poderão sugerir novas adequações.

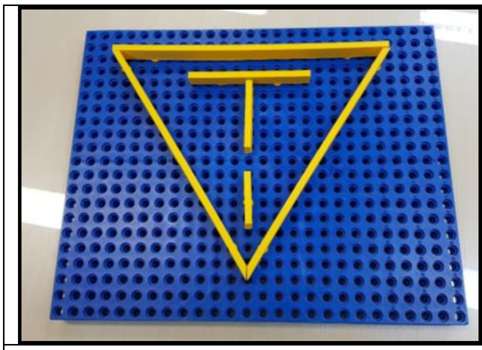
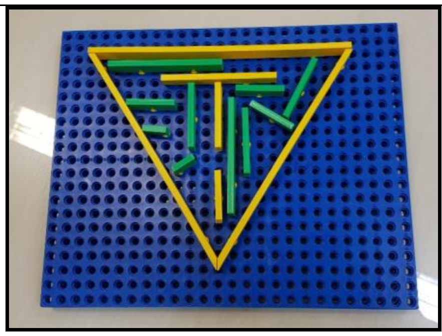
	

Figura 4ª	Figura 4b

Figura 4 – Peças construídas
Fonte: da pesquisa

Além das barras amarelas, também foram feitas peças de verdes para as paredes removíveis (Figura 4b). As cores são diferentes para que os professores possam organizar os materiais de forma mais adequada. No entanto, o material ainda deverá ser alterado, com substituição das barras móveis lisas, por barras com texturas, dessa forma facilitando a diferenciação entras as barras fixas e móveis.

Com base no que foi exposto, algumas considerações finais serão apresentadas a seguir.

6 Considerações Finais

O estudo de materiais manipuláveis possibilitou um novo olhar para o ensino, trazendo à tona que a discussão de que é possível, ensinar matemática de forma a propiciar que todos os alunos tenham acesso as informações propostas na atividade, de modo a respeitar a diversidade. Tais materiais ajudam a ressignificar o conceito de educação inclusiva, podendo ser utilizado com todos os alunos, tendo assim uma aula inclusiva e não apenas integrativa (MANTOAN, 2015).

Não estamos afirmando que os materiais manipuláveis são a solução para a educação inclusiva, mas é importante salientar que eles ajudam nos processos de ensino e aprendizagem em matemática. O intuito foi criar e disponibilizar materiais que possam ser utilizados por professores que ensinam matemática, tendo em vista a participação de todos os alunos no desenvolvimento das atividades propostas em sala de aula comum.

O desenvolvimento de um material didático proporciona alternativas para auxiliar os professores na prática pedagógica cotidiana, na falta de materiais didáticos manipuláveis disponíveis para trabalhar os diferentes conteúdos matemáticos, assim como, dispor um recurso para acesso da informação aos alunos que necessitam e para aqueles que não necessitam, um material complementar, beneficiando todos os estudantes.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Francielli Aparecida de; SOUZA, José Augusto; VASCONCELOS, Vinícius Franco. Um dia no museu. **Oficina do estágio supervisionado na educação básica 2 – UTFPR.** 2017

COELHO, Fredy; SCHEID, Eliane. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, v. 7, n. 2, p. 187-196, 2012. Disponível em: 10_26126-87947-Padronizado (uniandes.edu.co) Acesso em: 29 mar. 2023.

DANTE, Luiz. R; Matemática Projeto Teláris 1ªed. São Paulo: Ática 2013

FRANT, Janete Bolite. Tecnologia Assistiva para uma Educação Matemática Inclusiva. **Com a Palavra, o Professor**, v. 7, n. 17, p. 202-215, 2022. Disponível em: Tecnologia Assistiva para uma Educação Matemática Inclusiva | Com a Palavra, o Professor (geem.mat.br) Acesso em: 29 mar. 2023.

KASSAR, Mônica de Carvalho Magalhães. Educação especial na perspectiva da educação inclusiva: desafios da implantação de uma política nacional. **Educar em revista**, p. 61-79, 2011. Disponível em: SciELO - Brasil - Educação especial na perspectiva da educação inclusiva: desafios da implantação de uma política nacional Educação especial na perspectiva da educação inclusiva: desafios da implantação de uma política nacional Acesso em: 29 mar. 2023.

MANTOAN, Maria Teresa Eglér. **Inclusão escolar: o que é? por quê? como fazer?**. Summus Editorial, 2015.

MERCADO, K. P. V.; BARALDI, I. M. O que acontece quando passamos uma atividade matemática da tinta ao braile. **Anais do 2º Encontro Nacional de Educação Matemática Inclusiva**, p. 1-11, 2020.

NEIVA, Kathia María Costa. **Manual de pruebas de inteligencia y aptitudes**. Universidad Iberoamericana, 1996.

SCOLARO, Maria Angela. O uso dos Materiais Didáticos Manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de Matemática. **Acedido em**, v. 6, p. 1666-8, 2008. Disponível em: Microsoft Word - Artigo_MARIANGELA[1].doc (diaadiaeducacao.pr.gov.br) Acesso em: 29 mar. 2023.

SKOVSMOSE, Ole. Inclusões, encontros e cenários. **Educação Matemática em Revista**, v. 24, n. 64, p. 16-32, 2019. Disponível em: funes.uniandes.edu.co/24127/1/Skovsmose2019_Inclusões.pdf Acesso em: 29 mar. 2023.

X Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
O Ensino da Matemática e as Mudanças Curriculares na Educação Básica
Toledo, 02 a 05 de maio de 2023
ISSN: 2358-4947

WAVELET EM SÉRIE TEMPORAL DE PREVISÃO DE PRECIPITAÇÃO PARA UMA REGIÃO DO PARANÁ

André Luis Quiosi
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
quiosi@alunos.utfpr.edu.br

Márcio Paulo de Oliveira
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Resumo

As séries temporais, provenientes de modelos de previsão, são objeto de pesquisas em várias áreas das ciências como a estatística, meteorologia e agricultura. O processamento de series temporais é realizado por meio de softwares e pacotes com recursos específicos, como aqueles disponíveis no software R, BioEstat e Minitab e que permitem, por métodos estatísticos, a análise da grande quantidade de dados presentes nessas séries. Em séries temporais é importante a aplicação de recursos computacionais, de modo a automatizar a aquisição e processamento dos dados, com foco na investigação de variáveis e detecção de padrões que ampliem o conhecimento sobre um certo fenômeno aleatório. As investigações sobre séries temporais requerem o emprego de técnicas estatísticas, como aquelas associadas aos modelos autoregressivos (AR) e os modelos de média móvel autorregressivos (ARMA) e *wavelets*. As abordagens com *wavelets* permitem detectar a variação local de intensidade em uma série temporal, determinando uma superfície de resposta que considera as mudanças das frequências em baixa e alta escala. Este trabalho tem o objetivo de investigar a série temporal de previsão de precipitação de alcance decendial do modelo ECMWF, com o uso de *wavelets* para o ano de 2022 em uma região do estado do Paraná.

Palavras-chave: Wavelet. Série temporal. Previsão de precipitação.

1 Introdução

A demanda por previsões meteorológicas confiáveis tem aumentado nas últimas décadas, em resposta a essa necessidade centros nacionais de meteorologia desenvolvem modelos para fornecer previsões de características meteorológicas. Um dos modelos utilizados é o *European Centre for Medium-Range Weather Forecasts* (ECMWF). O *Observing-system Research and predictability experiment* (THORPEX) é um programa internacional de pesquisa, patrocinado pela *World Meteorological Organization* (WMO), que visa acelerar melhorias em previsões de um a quinze dias para previsões de grande impacto, tendo como um de seus componentes principais o THORPEX *Interactive Grand Global Ensemble* (TIGGE). O TIGGE prevê a cooperação de vários centros internacionais para o desenvolvimento de previsões de parâmetros climáticos como a precipitação pluviométrica (BOUGEAULT *et al.*, 2010).

Os modelos do TIGGE geram séries temporais de diversos parâmetros climáticos com passo temporal de até 360 horas, correspondente a 15 dias. Um das séries temporais de interesse em diversos setores da sociedade é precipitação pluviométrica, que é um parâmetro temporal com alta variabilidade e características sazonais.

Para analisar séries temporais há diversas abordagens, entre elas as associadas aos modelos autoregressivos (AR), modelos de média móvel autorregressivos (ARMA) e wavelets. As Wavelets, como o nome sugere, são “pequenas ondas”. O termo Wavelets apareceu pela primeira vez na literatura de geofísica no trabalho de Morlet et al. (1982). No entanto, o desenvolvimento das wavelets ocorreu em várias outras áreas como a estatística, processamento de sinais, sistemas hidrológicos, geofísica espacial e no processamento de imagens digitais (Vertteli e Herley, 1992; Nordemann, 1998; Bolzan, 2005).

O desenvolvimento das Wavelets foi discutido por HEIL e WALNUT (2006), Daubechies (1992), MEYER (1993) e VIDAKOVIC (1999). A metodologia de wavelets considera uma função $\psi(x)$. Duas características relevantes são a oscilação, em que as wavelets possuem a característica de "aumento e decréscimo", que pode ser expressa matematicamente pela condição $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,dx = 0$ que é uma propriedade compartilhada pelas wavelets. A segunda característica é o rápido decaimento também compartilhado pelas wavelets. As wavelets capturam oscilações de frequências em baixa e alta escala, sendo também chamadas de ondeletas.

As wavelets permitem decompor um sinal a diferentes níveis de resolução, também chamado de multiresolução. A representação de multiresolução fornece uma superfície de resposta hierárquica para interpretação de informação do sinal. Os detalhes de um sinal, nas diferentes resoluções, geralmente caracterizam diferentes estruturas físicas. <u>As resoluções mais baixas ($k=1$), caracterizam detalhes, geralmente, das grandes estruturas, já em resoluções mais altas ($k\rightarrow\infty$) obtemos detalhes mais finos.</u>

As ondeletas contínuas são comumentes utilizadas para visualizar, em um diagrama tridimensional, a relação existente entre os componentes de diferentes frequências, em função da escala temporal do sinal estudado, onde estas relações são comumente categorizadas como não-lineares. Fisicamente, em um sistema natural qualquer, é importante tentar buscar relações entre os diversos fenômenos físicos atuantes no sistema natural (Bolzan, 2006).

Assim, este trabalho tem o objetivo de investigar a série temporal de previsão de precipitação de alcance decendial do modelo ECMWF com o uso de wavelets para o ano de 2022 em uma região do estado do Paraná.

2 Material e Métodos

A disponibilidade da água é um fator essencial para o desenvolvimento das atividades antrópicas sejam elas relacionadas a produção, consumo, higiene entre outras. A precipitação pluviométrica abastece sistemas hídricos e suas previsões são relevantes e obtidas por meio de modelos de precipitação pluviométrica. Essa é uma variável que pode também ser utilizada como covariáveis para modelar outros fenômenos de interesse relacionados a produção de alimentos em geral. Neste trabalho será realizada uma análise de série temporal de previsão de precipitação pluviométrica obtida pelo modelo ECMWF com alcance temporal de 240 horas, que correspondente a um período de dez dias (decêndio).

Na etapa inicial foi tratada a estratificação espacial dos dados, selecionando da base as coordenadas geográficas correspondentes a um retângulo que contém o estado do Paraná (55ºW, 48ºW, 27ºS, 22ºS). Os pixels têm dimensão de 0,5º x 0,5º, totalizando 165 pixels, sendo que os valores em cada um deles são obtidos por interpolação realizada na própria base de dados. A região de estudo selecionada nesse trabalho corresponde a um pixel que abrange os municípios de Cascavel e Toledo, que possuem uma elevada atividade econômica contribuindo para o desenvolvimento do estado, sendo importante ampliar o conhecimento sobre as previsões de precipitação pluviométrica utilizadas em diversas atividades.

A seguir, realizou-se a estratificação temporal, considerando os decêndios de 2022, também considerando a Coordenada de Tempo Universal (UTC) como de 00:00 UTC, correspondente a 03:00 do horário de Brasília (BRT). Os arquivos com as informações foram obtidas do banco de dados TIGGE com a extensão grib (Gridded Binary). Esse é o formato padrão dos dados do programa de pesquisa climática mundial (WMO – World Weather Research Programme).

Uma função periódica $f(x)$ pode ser expressa por uma somatória de senos e cossenos da seguinte forma:

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx)+b_k sen(kx)\right), \tag{1}$$

em que a_0, a_k e b_k são determinados de forma analítica.

A transformada de Fourier (TF) é um recurso que pode ser utilizado para obter a contribuição para a energia total da série temporal, de cada função seno e cosseno presentes empregada na série. A TF, utilizando funções trigonométricas na forma complexa, pode ser expressa por:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}dt, \tag{2}$$

sendo ω a frequência e $f(t)$ a série temporal. O princípio da convolução ocorre na TF, e é importante para a teoria das wavelets.

Aplicando a TF sobre a série temporal obtém-se o espectro de energia. As expressões (1) e (2) são comumente utilizadas para análise de séries temporais estacionárias, que são séries cujos momentos estatísticos como média e variância não variam ao longo do tempo (Morettin, 1999). Entretanto, na natureza, as séries temporais podem também ser não estacionárias. Assim, Gabor, em 1946 propôs modificações a TF, deforma que uma série temporal fosse dividida em vários segmentos, e depois aplicada a TF a cada um dos segmentos separadamente. Essa proposta passou a ser conhecida como Transformada de Fourier Janelada (TFJ), podendo assim obter informação temporal em segmentos da série. Porém, a TFJ possui duas limitações, o tamanho da janela fixa e as funções trigonométricas possuem energia infinita, ou seja, limitadas em $-\infty$ e $+\infty$.

Dessa forma, (Morllet et al. 1982) propuseram uma função ψ com energia finita e capaz de comprimir ou dilatar, de forma a eliminar o problema da janela fixa. Foi identificado que se a base possuir suporte limitado, decaindo para zero muito rapidamente, então a melhor maneira desta base cobrir todo o eixo dos reais seria por meio de translações desta base em todo o comprimento da série temporal. Já sobre as dilações na Equação (2) cada função base da TF que são as exponenciais complexas é obtida por dilações na frequência. A translação e dilatação contidas em uma função base, permitem a obtenção das funções

ISSN: 2358-4947

de wavelets, sendo que as dilações e translações são indicadas pelas variáveis j e k, respectivamente.

Assim, as wavelets se referem a um conjunto de funções com forma de pequenas ondas geradas por dilatações $\psi(t)\rightarrow\psi(2t)$, e translações $\psi(t)\rightarrow\psi(t+1)$, de uma função base geradora simples $\psi(t)$. A partir da função $\psi(t)$ pode ser geradas as demais wavelets:

$$\psi_{j,k}(t)=\frac{1}{2}\psi\left(\frac{t-k}{j}\right), \tag{3}$$

dessa forma a transformada de wavelet é definida por:

$$f,\psi_{j,k}>\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi\left(\frac{t-k}{j}\right)dt, \tag{4}$$

sendo que esta função deve ser quadraticamente integrável dentro do intervalo de tempo real, isto é, deve ter energia finita com a média dessa energia igual a zero.

3 Resultados e Discussão

Na Figura 1 são apresentadas as localizações geográficas dos dados utilizados no estudo, sendo que os círculos indicam os pixels em cada superfície de previsão que contêm os dados da série temporal. Para cada uma das datas foram obtidas as previsões de precipitação pluviométrica pelo modelo *European Centre for Medium-Range Weather Forecasts* (ECMWF) para o passo de 240 horas, que corresponde aos decêndios (dez dias) e para o horário 00:00 UTC. Os valores dos pixels apresentam variabilidade tanto temporal quanto espacial, sobretudo aqueles indicados pelos círculos, que formam a série temporal em análise. Na área de estudo, é possível observar uma grande variação na variável de precipitação pluviométrica, com valores que variam de zero durante períodos de estiagem, como em 20/07/2022, a valores próximos de 150 mm em 11/10/2022. Essa grande variação evidencia um comportamento não estacionário da série de dados. Os dois valores extremos dessa série evidenciam possíveis problemas, uma vez que períodos prolongados de estiagem podem afetar a disponibilidade de água nos municípios, enquanto períodos com precipitações elevadas podem causar prejuízos tanto em regiões urbanas quanto rurais. Nas áreas urbanas, as precipitações elevadas frequentemente levam a inundações que afetam o trânsito e causam danos às residências, resultando em prejuízos para os moradores. Em regiões rurais, os principais prejuízos estão relacionados às culturas agrícolas, que podem ser danificadas, resultando em diminuição da produtividade e, consequentemente, afetando a renda das famílias que dependem dessas atividades.

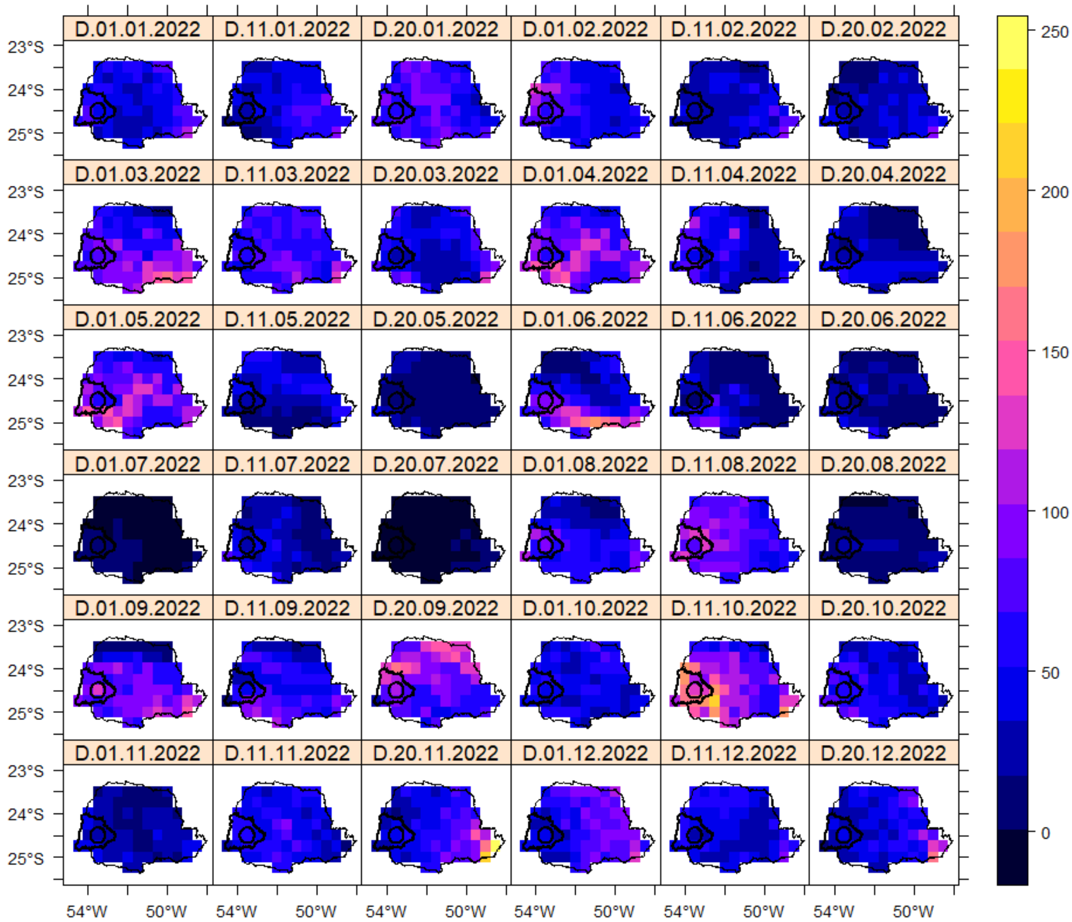


Figura 1 – Localização espacial dos dado da série temporal. Os círculos indicam os pixels em cada superfície de previsão que contém os dados da série temporal.

Na Figura 2 é apresentada a série temporal proveniente dos dados dos pixels indicados na Figura 1. Essa série apresenta somente 36 valores, sendo três previsões de alcance decendial em cada mês do ano de 2022. É possível observar um comportamento não estacionário nessa série de dados de precipitação pluviométrica, sendo um fato comum em séries temporais tomadas de qualquer sistema físico, ou seja, possuírem características não-estacionárias. Entenda-se como característica não-estacionária séries-temporais cujo seus momentos estatísticos, média e variância, variam nos segmentos da série (Bolzan, 2004). Pode ser observado um pico no decêndio de 01/06/2022, e nos decêndios 01/09/2022, 20/09/2022 e 11/10/2022, que representam altas precipitações acumuladas.

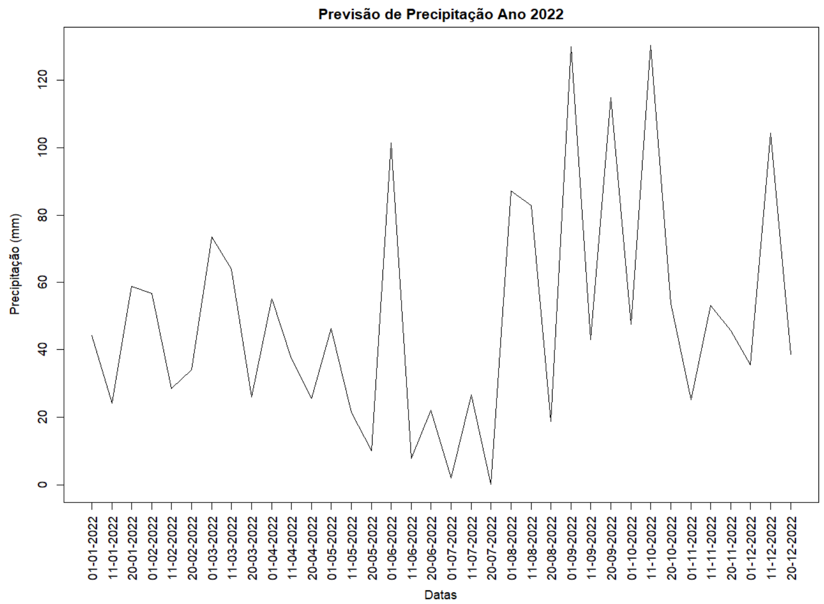


Figura 2 – Série temporal para os dados de previsão de precipitação do modelo ECMWF para o passo de 240 horas.

Uma análise com a wavelet de Morlet foi realizada nos dados apresentados na Figura 2. Uma das vantagens desse instrumento de análise é o de posibilitar o estudo de fenômenos que ocorrem em diversas escalas (frequências). A wavelet de Morlet é uma transformada contínua que permite gerar uma visualização em um diagrama tridimensional, mostrando a relação entre as componentes de diferentes frequências e a escala temporal do sinal em estudo. Essas visualizações são frequentemente não-lineares. Em um sistema natural qualquer, é importante buscar relações entre os diversos fenômenos físicos atuantes no sistema (Bolzan, 2005).

Na Figura 3 é apresentado o diagrama tridimensional, também chamado de periodograma da wavelet de Morlet. Nessa visualização da série temporal, o eixo y é a escala de frequências, o eixo x é a escala de tempo, e por fim, um terceiro eixo representa a intensidade de energia, geralmente, representado por cores no diagrama.

Assim, na Figura 3, o eixo vertical apresenta os períodos em decêndios da serie temporal, no eixo horizontal é apresentado o comprimento temporal em decêndios para o ano de 2022, e as cores representam o módulo da amplitude do sinal em cada escala de frequência, ou seja, se refere a energia associada a cada frequência existente no sistema (Bolzan, 2005). Observe no gráfico que o período com maior nível é de 01/08/2022 a 11/10/2022, que corresponde aos períodos em que as previsões indicaram precipitações mais atuantes na região de estudo. Com base nestes resultados, é possível determinar a variância da energia em cada um destes períodos decêndios, com o objetivo de identificar quais possuem maior energia.

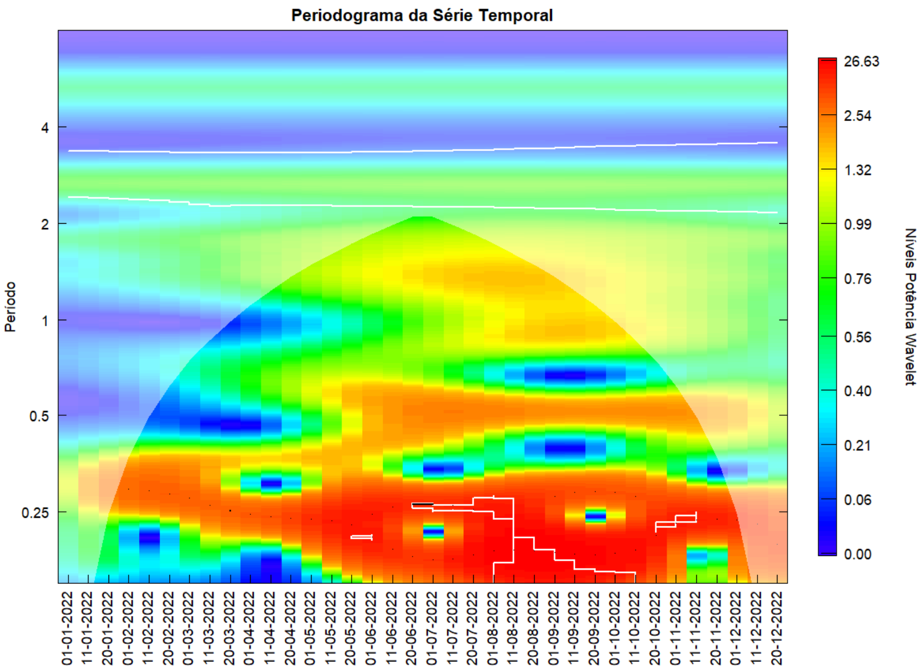


Figura 3 – Periodograma da série temporal em estudo, obtido com a wavelet de Morlet.

4 Considerações Finais

O fenômeno aleatório de precipitação pluviométrica, abordado neste trabalho, exibe variabilidade espacial e temporal, tornando-se um objeto de estudo relevante. Compreender melhor esse fenômeno pode auxiliar na tomada de decisões em atividades sociais desenvolvidas na região.

A precipitação pluviométrica pode ser entendida como um parâmetro climático e faz parte de um complexo ciclo hídrico. Nesse sentido, a abordagem com wavelet para analisar uma série temporal propicia um meio matemático adequado para visualizar o comportamento de uma série temporal, pois permite avaliar diferentes frequências em função da escala temporal do sinal.

Em sistemas naturais é comum a busca por detectar relações entre diversos fenômenos atuantes nesses sistemas, e que geralmente são representados por series temporais não estacionárias, cujo estudo demanda técnicas robustas que sejam capazes de capturar e evidenciar essas relações.

Pesquisas adicionais são necessárias, para ampliar a fundamentação teórica e incrementar a capacidade interpretativa dos resultados, a fim de explorar sua aplicabilidade em outros fenômenos aleatórios representados por séries temporais.

REFERÊNCIAS

VERTTELI, M.; HERLEY, E. C. Wavelets and filter banks: Theory and design. IEEE Transactions on Signal Processing. 40, 2207, 1992.

NORDEMANN, D. J. R. Periodicidades, Tendências e Previsão a Partir da Análise Espectral Dinâmica da Série dos Níveis do Rio Paraguai, dm Ladário (1900/1995). Pesquisa Agropecuária Brasileira, Brasília, v.33, Número Especial, p.1787-1790, 1998.

M.J.A. Bolzan, Brazilian Journal of Physics 35, 592 (2005).

HEIL, C.; WALNUT, D. F. Fundamental Papers in Wavelet Theory, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2006.

DAUBECHIES, I. (1992) Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia.

MEYER, Y. (1993) Wavelets: Algorithms and Applications, SIAM, Philadelphia. Vidakovic, B. Statistical Modeling by Wavelets, Wiley, New York, 1999.

VIDAKOVIC, B. Statistical Modeling by Wavelets, Wiley, New York, 1999.

BOUGEAULT, P.; TOTH, Z.; BISHOP, C.; BROWN, B.; BURRIDGE, D.; CHEN, D. H.; EBERT, B.; FUENTES, M.; HAMILL, T. M.; MYLNE, K.; NICOLAU, J.; PACCAGNELLA, T.; PARK, Y. Y.; PARSONS, D.; RAOLT, B.; SCHUSTER, D.; DIAS, P. S.; SWINBANK, R.; TAKEUCHI, Y.; TENNANT, W. WILSON, L. WORLEY, S. The THORPEX interactive grand global ensemble. Bulletin of American Meteorological Society, v. 91, n. 8, pp. 1059 – 1072, 2010.

MORETTIN, P.A. Ondas e Ondeletas. EdUSP, São Paulo, v. 1, p. 42, 1999.

Gabor, D., 1946, Theory of communication, part I: J. Int. EE., 93, part III, p. 429-441.

MORLET, J.; ARENS, G.; FOURGEAU, E.; AND GIARD, D. Wave propagation and sampling theory – Part I: Complex signal and scattering in multilayered media: Geophysics, 47, p. 203-221, 1982.

BOLZA, M. J. A. Transformada em ondeleta: Uma necessidade. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 28, n. 4, p. 563-567, 2006.

X Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
O Ensino da Matemática e as mudanças curriculares na Educação Básica
Toledo, 02 a 05 de maio de 2023.

A UTILIZAÇÃO DA IMPRESSORA 3D NA PRODUÇÃO DE UM TANGRAM ADAPTADO PARA CEGOS

Leandro Wrzecionek de Brito
UTFPR - Toledo
leandrobrito@alunos.ufpr.edu.br

Luana Caroline Junges
UTFPR - Toledo
luanacarolinejunges@hotmail.com

Renato Francisco Merli
UTFPR - Toledo
renatomerli@utfpr.edu.br

Resumo

O Tangram é um material versátil e utilizado de diferentes formas na Geometria. No entanto, um aluno cego pode ter dificuldades em compor figuras com o Tangram. Dado isso, objetivou-se criar uma adaptação do Tangram, com impressora 3D, para que o docente consiga utilizar o material com alunos cegos. Para tanto, além de incluir siglas em Braille nas sete peças do Tangram, modelou-se as representações bidimensionais do quadrado, gato, casa e barco, de modo que essas figuras tivessem bordas com relevo. Posteriormente, passando por dificuldades como falhas de impressão, erros de modelagem e problemas com o uso da impressora 3D, o material foi impresso, sendo possível utilizá-lo para ensinar Geometria Plana para alunos cegos. A partir disso, concluiu-se que usar a impressora 3D pode ser algo desafiador para um professor, mas ao dominar essa ferramenta tecnológica, é possível criar materiais manipuláveis assistivos essenciais para alunos com necessidades especiais.

Palavras-chave: Inclusão. Tecnologias Assistivas. Geometria Plana.

1 Introdução

A Educação Inclusiva tem estado cada vez mais presente na escola com novas estratégias de ensino, a fim de que todos indivíduos desfrutem dos mesmos direitos e deveres independentemente de suas especificidades. Aliado a isso, novas tecnologias assistivas estão sendo utilizadas para auxiliar os professores na produção de materiais inclusivos.

Nessa perspectiva, a inclusão deve ocorrer, também, dentro da sala de aula. Neste artigo, trataremos do relato de experiência de um trabalho desenvolvido na disciplina de

Tecnologias no Ensino de Matemática que se refere ao uso da Impressora 3D na produção de materiais assistivos, em especial, materiais para alunos com deficiência visual total.

Dado isso, apresentamos uma adaptação do Tangram, pensada para a utilização com alunos cegos no processo de aprendizagem de Geometria Plana. A sua aplicabilidade pode ser explorada pelo professor para o ensino de outros conteúdos, como: área, perímetro, razão, proporção, fração, multiplicação, divisão, semelhança, simetrias, transformações isométricas, etc.

O material foi modelado e, posteriormente, produzido em uma Impressora 3D no Laboratório Interdisciplinar de Formação de Educadores (LIFE), nas dependências da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - campus Toledo.

Nas próximas seções são apresentadas breves reflexões sobre a importância da inclusão e dos materiais manipuláveis nos processos de ensino e aprendizagem dos alunos. Na sequência é apresentada uma proposta de material didático e as instruções necessárias para sua produção, o Tangram para cegos, como forma de ampliar a noção espacial desses educandos.

2 Inclusão

A inclusão pode ser caracterizada como um movimento social, político e educacional que defende o direito de todos os indivíduos participarem de forma consciente e responsável na sociedade da qual fazem parte, sendo respeitados por suas particularidades que os diferencia dos demais (FREIRE, 2008).

No âmbito educacional, a chamada Educação Inclusiva defende o direito de todos os alunos terem a oportunidade de desenvolver suas potencialidades, bem como adquirir competências que permitam o desenvolvimento da cidadania para o convívio em sociedade. Ela é uma perspectiva educacional que visa atender às necessidades educacionais de todos os alunos, incluindo aqueles com deficiências e diferenças individuais; se baseia no princípio de que todos os alunos têm direito à educação de qualidade, independentemente de sua origem, capacidade ou características individuais (MANTOAN; PRIETO, 2003).

Com isso, a Educação Inclusiva busca criar um ambiente escolar acolhedor e inclusivo, onde todos os alunos se sintam valorizados e respeitados, e onde a diversidade é celebrada e considerada uma oportunidade para o aprendizado. Isso significa que as escolas devem estar preparadas para adaptar seu currículo, metodologias e ambientes físicos para atender às necessidades de todos os alunos (MERCH, 1998).

Nesse sentido, a impressora 3D é uma ferramenta que pode auxiliar na adaptação de metodologias e materiais para alunos com algum tipo de deficiência ou necessidade específica. Por meio dela, é possível criar materiais manipuláveis táteis que, em conjunto com uma abordagem metodológica adequada, podem incluir alunos que antes eram excluídos por métodos tradicionais e abstratos.

3 Materiais Manipuláveis

Segundo Borin (1996), o jogo como material didático é um importante aliado para superar bloqueios criados por aqueles alunos que temem a matemática e sentem-se incapazes de compreendê-la. O fato de tornar esses alunos sujeitos ativos no processo de aprendizagem, por meio de jogos, propicia que estes façam análises de seus acertos e erros, proporcionando reflexões - muitas vezes imediatas - acerca do conteúdo matemático abordado.

A utilização de jogos une a Educação Matemática com a Educação Científica em geral, pois permite que o aluno resolva problemas e desenvolva habilidades de raciocínio lógico, concentração, interpretação, adaptação, investigação, análise, previsão e tomada de decisão embasada em fundamentos e argumentos (TEIXEIRA, 2014).

O jogo, em sala de aula, é considerado um material didático, já que um material didático é qualquer material com utilidade na aprendizagem ou na Educação (LORENZATO, 2006). Partindo dessa perspectiva, é pertinente que o professor considere o material didático como contribuinte no processo de abstração dos alunos.

No ensino da Geometria, os jogos mais utilizados como materiais didáticos são Tangram, Tetris, Cubo Mágico e Origami (TEIXEIRA, 2014). Estes têm como objetivo desenvolver a percepção do espaço, a compreensão sistematizada das figuras geométricas, bem como depreender a lógica de sua construção.

Em nosso caso particular, estamos interessados no Tangram, quebra cabeça chinês que é composto por sete peças em formato geométrico (cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo) que permite a representação de figuras através da organização de suas peças, sem sobreposições, entre elas animais, plantas, pessoas, objetos, letras, números, figuras geométricas, entre outras (BOHNING, 1997).

A utilização do Tangram como material pedagógico promove a construção de conceitos abstratos. De acordo com Kaleff (2003, p. 16), “[...] ao visualizar objetos geométricos, o indivíduo passa a ter controle sobre o conjunto das operações mentais básicas exigidas no trato da geometria”. No caso de alunos com deficiência visual, Healy e Fernandes (2011) destacam que eles podem atingir as mesmas metas de aprendizagem propostas aos demais estudantes, contanto que sejam consideradas suas diferenças e que sua forma de compreender o mundo seja validada.

Nesse contexto, considerando o ensino de Geometria Plana, é válido relacionar o uso do Tangram a alunos com deficiência visual. Entretanto, em sua forma original, esse material pouco agrega aos estudantes cegos. Nessa perspectiva, o objetivo do trabalho é apresentar uma adaptação do Tangram que possa ser utilizada por alunos cegos.

4 Produção do Material

Para o desenvolvimento dos desenhos do Tangram, foram utilizadas bases tridimensionais, assim como na Figura 1.

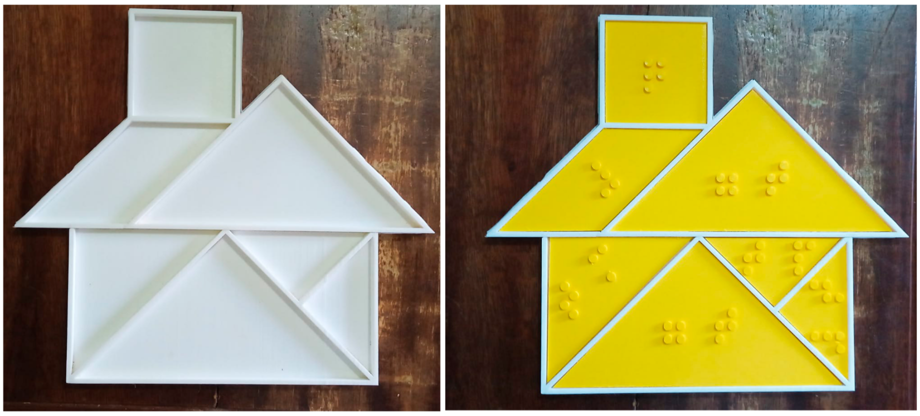


Figura 1 - Bases do Tangram Projetadas
Fonte: da pesquisa

Por exemplo, o conceito de uma casa feita por peças do Tangram não é algo que faz sentido para um aluno cego. Até porque, essa casa, na verdade, é uma representação bidimensional de uma casa. Um aluno vidente faz a conversão ótica da figura bidimensional da casa para uma casa real - que é tridimensional - com o auxílio dos professores, que estimulam essa comparação entre a representação bidimensional e tridimensional. Agora, um aluno cego tem dificuldades na percepção espacial e o conceito de uma casa 2D não tem significado tátil para o aluno. Porém, o aluno cego tem a capacidade de obter várias informações que o orientam utilizando as mãos ao tocar os objetos (GUIMARÃES *et al.*, 2019).

Portanto, para se utilizar o Tangram com alunos cegos, é de suma importância que o aluno tenha uma representação tridimensional - apresentada na Figura 1 - de uma casa bidimensional. Sendo assim, criamos as bases bidimensionais com relevo nas bordas e com fundo. Ainda, algumas das bases possuem partições internas, o que possibilita ao aluno cego tatear as bordas e perceber mais facilmente quais peças do Tangram encaixam na base.

Nesse contexto, a modelagem do material teve duração de 4 horas. Assim, foi criado um paralelepípedo de base quadrada com medidas 190mm x 190mm x 4mm, assim como na Figura 2.

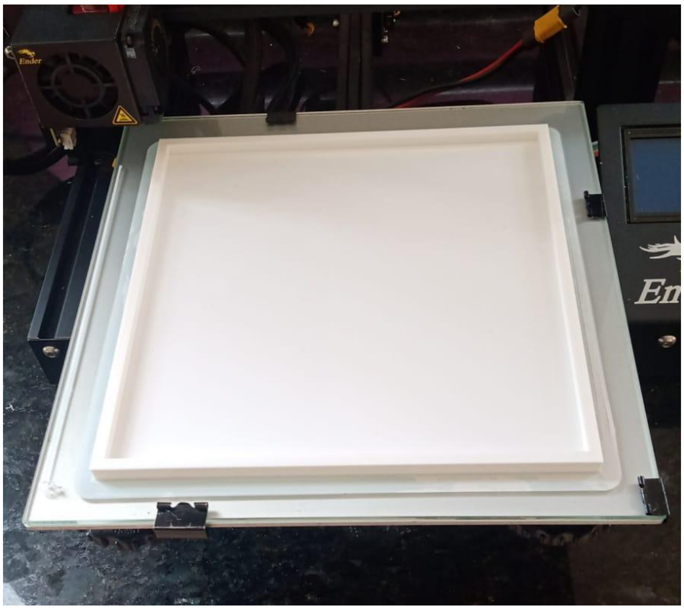


Figura 2 - Bases Quadrada
Fonte: da pesquisa

Foi adotada a altura de 4mm pois acreditou-se que essa medida seria suficiente para se ter um material resistente à manipulação e que gastasse o mínimo possível de filamento PLA[1], levando assim, a um tempo menor de fabricação das peças. Sendo assim, optamos por um balanço entre resistência e tempo de fabricação.

[1] PLA, conhecido como poliácido láctico, é um polímero sintético termoplástico biodegradável que está substituindo o plástico em certas aplicações e é utilizado na impressão 3D devido as suas boas características quando aquecido (MUV, 2017).

Com o paralelepípedo já criado, foram feitas repartições para que a figura do paralelepípedo se transformasse em um Tangram, com 2 triângulos grandes, 1 triângulo médio, 2 triângulos pequenos, 1 losango e 1 quadrado, conforme Figura 3.

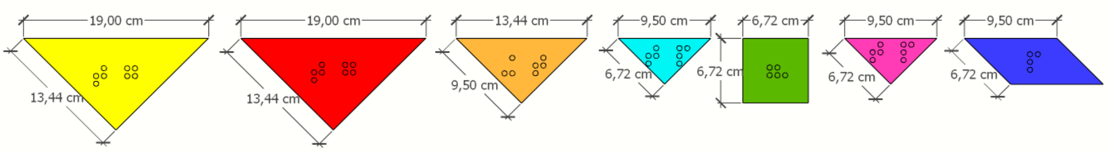


Figura 3 - Tangram modelado
Fonte: da pesquisa

Ainda, em cada peça do Tangram, foi adicionada uma sigla com alto relevo em Braille para que o aluno cego reconheça a peça mais facilmente ao tocá-la. O Quadro 1, a seguir, traz a relação entre o tipo de peça e as siglas, em português, correspondentes ao que foi impresso em Braille.

Quadro 1 - Tipo de Peça com seu símbolo em Braille

Tipo da peça	Sigla Portuguesa impressa em Braille
Triângulo Maior	TG
Triângulo Médio	TM
Triângulo Pequeno	TP
Losango	L
Quadrado	Q

Fonte: da pesquisa

Feitas as peças com Braille, também foi criada uma base quadrada para guardar o Tangram. Uma vez criadas essas peças, foram produzidos materiais auxiliares aos alunos cegos para a construção de uma casa, de um gato e de um barco (Figura 4).

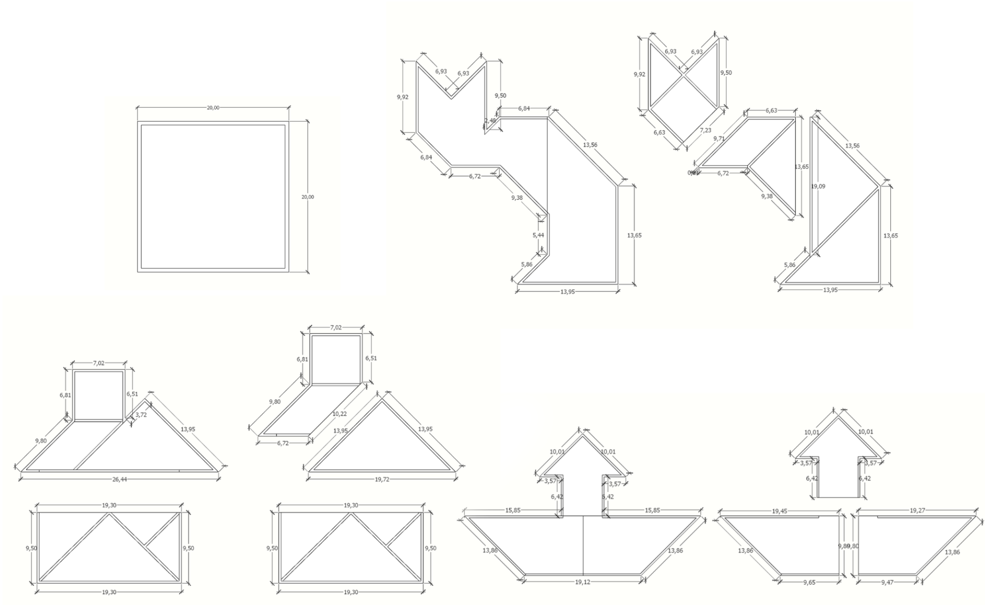


Figura 4 - Bases do Tangram Projetadas
Fonte: da pesquisa

Para construir as bases, cópias das peças do Tangram foram modeladas e posicionadas de modo que fizessem seus respectivos desenhos. A partir disso, retirou-se as alturas das peças do Tangram, para manter apenas as linhas em formato dos desenhos. Então, fez-se o fundo e as bordas das figuras a partir das linhas, elevando 2mm para o fundo e 6mm para as bordas - totalizando uma altura de 8mm. Para os desenhos que possuíam as repartições internas, bastava manter as linhas internas formadas pelo Tangram. No caso em que não havia borda interna, removemos as linhas internas.

Feitos os modelos, iniciou-se a impressão em uma impressora de modelo *Creality Ender 3*. A primeira tentativa foi imprimir o Tangram junto com o gato que possui as regiões internas, posicionado de pé na impressão. Como o resultado duraria quase um dia para ser finalizado, não foi possível acompanhar a fabricação continuamente.

Ao chegar na sala no outro dia, a impressora 3D ainda encontrava-se ligada, mas sem fazer as peças - e foi assim que percebemos que o filamento PLA não estava chegando mais à extrusora. As peças do Tangram que estavam sendo impressas simultaneamente quase ficaram prontas - no entanto, na maioria delas, faltou a impressão do Braille, comprometendo seu uso.

Também foi pensado em imprimir o Braille separadamente para colar nas peças já fabricadas, mas não foi possível. Assim, o material anterior foi descartado e o Tangram novamente teve que ser impresso. Contudo, por conta de um novo rompimento no filamento de PLA, foi decidido trocar o filamento.

Ao mesmo tempo, um problema corrigido na segunda impressora (de iguais características às da primeira), possibilitou fazer impressões simultâneas, diminuindo o tempo de produção. Uma vez impressas, outra dificuldade surgiu, o encaixe das peças do Tangram na região quadrada. Isso se deu por que a dilatação do material não foi levada em consideração para a fabricação das peças. Outro aspecto que pode ter ajudado no problema foi que os triângulos maiores podem ter tido algum problema de impressão na região dos vértices, devido a problemas de regulagem da cama da impressora. Posteriormente, lixamos os lados das peças do Tangram.

Tendo finalizado essas impressões, a próxima impressão foi a do gato com bordas internas. O modelo de impressora *Creality Ender 3* só permite a impressão de objetos com medidas máximas de 200mm x 200mm x 250mm, o que levou a produção da peça em três etapas (Figura 5), uma vez que era maior que essas medidas.

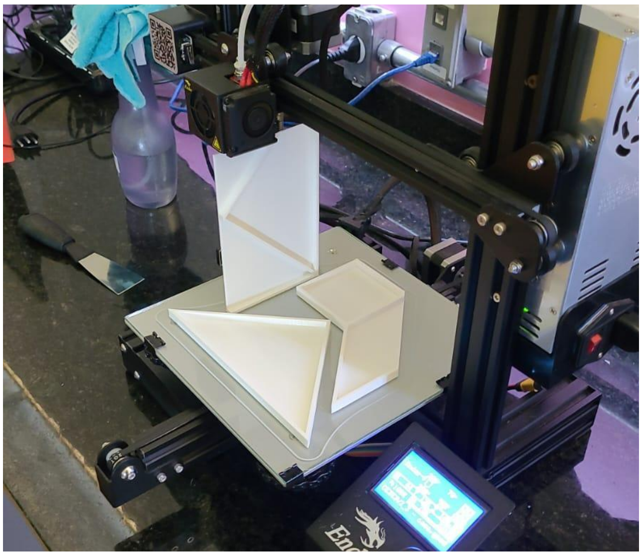


Figura 5 - Exemplo de impressão em partes - casa
Fonte: da pesquisa

Com esses empecilhos superados, conseguimos fazer todas as impressões quase tranquilamente - com exceção de alguns problemas de conversão da modelagem para o *Ultimaker Cura*. Ainda, na última peça impressa, no gato que possui apenas as bordas laterais, uma de suas orelhas ficou danificada por falha na regulagem da impressora, realizada por uma pessoa externa ao grupo devido à falta de disponibilidade nossa para realizar a impressão das peças. Por fim, a base do barco não foi impressa, pois as impressoras estavam ocupadas e não havia mais tempo hábil, no final do semestre, para fazermos a impressão no momento.

4.1 Aplicação do Material

Dada a exposição da criação do material, é possível agora apresentar um dos possíveis usos do material em uma sala de aula, para trabalhar com Geometria Plana, dando enfoque ao aluno cego.

Como já defendido, o Tangram é uma excelente forma de compor diferentes representações de figuras utilizando suas diferentes peças. Com as adaptações feitas, o material assistivo abre novas perspectivas para trabalhar com a noção espacial de alunos cegos.

Sendo assim, pensamos em uma sequência didática com duração de 3 horas-aula, recomendada para o 6º ano do Ensino Fundamental, a fim de trabalhar com Geometria Plana. O material necessário é o Tangram desenvolvido para um aluno cego, além do Tangram básico[2] para os demais alunos. As discussões a seguir podem ser utilizadas para todos os alunos, sendo cegos ou videntes.

De modo exposto, é possível estruturar a sequência didática para que se atinja os seguintes objetivos: compor e decompor figuras geométricas planas utilizando as peças do Tangram; aprimorar a noção espacial e identificar as características de triângulos e quadriláteros a partir da composição e decomposição de figuras. Dada a versatilidade do material, é permitido desenvolver diferentes atividades, bastando que se selecione desenhos diferentes.

Para tanto, primeiramente, é importante contextualizar o aluno sobre o material, contando sua história e comentando sobre a possibilidade de criar diversas figuras através do Tangram. Logo após essa breve apresentação, é possível que o professor disponibilize o material para que o aluno manipule-o, tateando as siglas e peças, verificando seus tamanhos e semelhanças.

Com isso, o professor pode lhe entregar a base quadrada (Figura 2) e ajudá-lo a montar inicialmente as peças do Tangram na base. Após conseguirem, é interessante que o aluno tente sozinho, para verificar sua memória espacial e posicional.

[2] O Tangram adaptado para alunos cegos também pode ser utilizado por alunos videntes. Entretanto, devido ao custo de produção e a falta desse material para todos, assumimos que as escolas possuem o Tangram comum com mais quantidade e, por isso, sugerimos sua utilização para alunos videntes.

Daí em diante, o professor pode pedir para que o aluno tente montar as figuras das demais bases que se encontram na Figura 4. Recomendamos a seguinte sequência: gato com borda interna, casa e, por último, gato sem borda interna.

Ao final, o objetivo é verificar se o aluno cego consegue estabelecer uma relação com o primeiro gato montado, com as bordas internas, e o gato sem as bordas internas, montado por último.

5 Considerações Finais

Conclui-se, desse modo, que o objetivo de produzir um Tangram adaptado a cegos foi cumprido. Para tanto, fizemos o *design* das peças, adicionamos uma sigla em Braille no material, além do *design* das bases no formato dos desenhos, realizando todas as impressões 3D posteriormente.

Embora tenhamos obtido como resultado algumas peças que precisaram ser lixadas, é fato que nos faltava experiência prévia com impressões 3D. Nesse sentido, cabe salientar a importância de atividades como essas na formação inicial dos futuros professores, uma vez que, ao chegar na escola, estaremos preparados.

Alguns dos desafios enfrentados no processo de produção do material foram: considerar a dilatação do PLA; observar melhor a área de impressão e ter cautela na regulagem da impressora 3D. Ao mesmo tempo, percebeu-se que a impressora 3D é um recurso tecnológico que, ainda, requer avanços tecnológicos para tornar seu uso mais intuitivo e produtivo. Logo, existe uma curva de aprendizado e cada erro pode ser uma nova lição.

Com os aprendizados obtidos, sentimos falta de aplicar o material em sala de aula, contudo, esperamos que essa atividade possa ser realizada no futuro a fim de unir a teoria discutida com a prática. Vale ressaltar também que há a base do barco já modelada, mas que não foi impressa e seria importante para uma aplicação futura, possibilitando mais figuras planas ao aluno cego.

Sendo assim, a impressora 3D é um recurso extremamente potente, com muitas possibilidades de uso pedagógico, visto que é possível adaptar materiais já existentes para certas especificidades, assim como no Tangram adaptado para alunos cegos. Logo, podemos inferir que a utilização de ferramentas tecnológicas como a impressora 3D, serão essenciais na produção de novos materiais assistivos para sala de aula.

Referências

BOHNING, Gerry; ALTHOUSE, Jody Kosack. Using tangrams to teach geometry to young children. **Early childhood education journal**, v. 24, p. 239-242, 1997. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/BF02354839. Acesso em: 30 de mar. de 2023.

BORIN, Júlia. **Jogos e Resolução de Problemas**: Uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP, 1996.

MUV. Manufatura digital. **Filamento PLA:** A verdade sobre o plástico biodegradável na impressão 3D, 2017. Disponível em https://blog.muv.ind.br/filamento-pla-impressao-3d. Acesso em: 30 mar. de 2023.

FREIRE, Sofia. **Um olhar sobre a inclusão.** Revista de Educação, Vol. XVI, n. 1, 2008, p.5-20 Disponível em: https://bit.ly/40my23u. Acesso em: 30 de mar. de 2023.

HEALY, Lulu; FERNANDES, Solange Hassan Ahmad Ali. Relações entre atividades sensoriais e artefatos culturais na apropriação de práticas matemáticas de um aprendiz cego. **Educ. rev. [online]**. 1, 2011, p.227-243. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1590/S0104-40602011000400015. Acesso em: 17 mar. 2023.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. **Vendo e entendendo poliedros:** do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos. EdUFF, 2003.

LORENZATO, Sérgio (org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. 1ª. Ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. Coleção Formação de Professores.

MANTOAN, Maria Teresa Eglér; PRIETO, Rosângela Gavioli. **Inclusão escolar**: O que é? Por quê? Como fazer?, v. 12, 2003.

MRECH, Leny Magalhães. O que é educação inclusiva. **Revista Integração**, v. 10, n. 20, p. 37-40, 1998. Disponível em: https://bit.ly/41HXBNC. Acesso em: 29 mar. 2023.

TEIXEIRA, Ricardo Roberto Plaza. Jogos em sala de aula e seus benefícios para a aprendizagem da matemática. **Revista Linhas**, v. 15, n. 28, p. 302-323, 2014. Disponível em: https://bit.ly/3KPEp9V. Acesso em: 30 mar. 2023.

Material manipulável inclusivo: o ensino de operações com números inteiros

Angela de Cesaro
UTFPR
angelacesaro@alunos.utfpr.edu.br

Isadora Vanzella Picinini
UTFPR
isadoravanzella@alunos.utfpr.edu.br

Renato Francisco Merli
UTFPR
renatomerli@utfpr.edu.br

Resumo

O artigo a seguir tem como objetivo apresentar o material inclusivo produzido na disciplina de Tecnologias no Ensino da Matemática do curso de Licenciatura em Matemática e ofertado pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná - campus Toledo. O material em questão é um tipo de dominó composto por peças positivas e negativas, tendo como proposta auxiliar todos os alunos no processo de compreensão das operações envolvendo os Números Inteiros, incluindo alunos com deficiência visual. Sua produção se deu a partir do uso de uma impressora 3D e, por conta disso, foi possível representar também as peças utilizando o sistema braile de escrita. Sendo assim, como produto do trabalho desenvolvido, concluímos que o material pode ser uma alternativa no ensino das operações envolvendo os Números Inteiros, uma vez que pode ser utilizado por todos os alunos, promovendo a aprendizagem e a inclusão.

Palavras-chave: Educação Matemática. Impressora 3D. Cegueira. Baixa visão.

1 Introdução

Quando falamos em Educação Inclusiva e Educação Matemática, devemos refletir sobre os motivos pelos quais elas se fazem tão necessárias no contexto educacional, e aqui não estamos tratando apenas das necessidades educacionais específicas de cada aluno, mas também a influência que ambas podem exercer sobre a prática docente, o Projeto Político Pedagógico das escolas e os currículos escolares.

Embora a inclusão escolar faça referência ao acesso e permanência de todo e qualquer aluno em uma determinada instituição de ensino, pessoas, atreladas ou não a área da educação, acreditam que a escola sendo inclusiva, destina-se apenas a aqueles alunos cujas necessidades educacionais são especiais.

O que ocorre é que, quando tratamos de inclusão, a concepção de Escola Tradicional cai por terra, assim como os seus valores, uma vez que, a inclusão contraria qualquer segregação que possa ser estabelecida. Em seu texto, Nogueira trás uma ideia sobre quais seriam os valores acerca da concepção de Escola Tradicional, tendo em vista que a inclusão "[...] rompe com o conceito de um desenvolvimento curricular único, com o aluno padrão estandardizado, de aprendizagem como transmissão, da escola como estrutura de reprodução" (NOGUEIRA *apud* RODRIGUEZ, 2005, p. 60).

As chamadas micro exclusões costumam ocorrer com certa frequência em sala de aula, e principalmente, durante as aulas de Matemática, uma vez que, a própria disciplina já exclui uma grande quantidade de estudantes. Isso porque alunos com necessidades educacionais sentem certa dificuldade em acompanhar as aulas que, em sua maioria, voltam-se para aqueles alunos cujo desempenho na disciplina é mais satisfatório (FAUSTINO *et al.*, 2018).

Além disso, as micro exclusões podem estar relacionadas a práticas discriminatórias, ainda que sutis. É o caso dos alunos que, por possuírem alguma necessidade educacional especial, por exemplo a cegueira ou baixa visão, são subestimados e limitados quanto a suas aprendizagens.

> A micro exclusão de estudantes com necessidades especiais pode ainda ser evidenciada quando há susto ou admiração em alguma habilidade demonstrada por essas pessoas ao realizarem alguma tarefa. Comentários do tipo “até fulano que é cego conseguiu fazer esse exercício”; “ele é surdo, mas, mesmo assim, conseguiu entender”; “nem ele que é cadeirante está reclamando” parecem sustentar uma expectativa de descrédito quanto às habilidades das pessoas com necessidades especiais, fazendo com que esses estudantes sempre sejam vistos como inferiores aos demais (FAUSTINO *et al.*, 2018, p. 905).

É nesse contexto que recorremos à Educação Matemática. Sua idealização surge a partir das dificuldades que se tem, não somente de aprender, mas também de ensinar Matemática, contrariando a ideia de que nem todos são aptos a aprendê-la. Para que a Educação Matemática venha a ser também Inclusiva, é preciso se desvencilhar de práticas que excluam.

Não só isso, é imprescindível que o professor aceite, respeite e compreenda que a presença de um aluno com necessidades educacionais não significa que sua atuação docente estará comprometida. É preciso reconhecer que nem todos se sentem preparados para lidar com esses alunos, seja pela falta de capacitação profissional, de recursos, de tecnologias assistivas ou pela própria estrutura física do local onde atua.

Tendo em vista a dificuldade que se tem em ensinar Matemática para todos, apresentamos uma proposta de ensino sobre as operações com números inteiros, a partir do desenvolvimento de materiais manipuláveis inclusivos, produzidos numa impressora 3D. Na próxima seção são apresentados os principais conceitos de Educação Inclusiva. Na sequência o processo de produção do material é apresentado e, por fim, algumas considerações são feitas de como utilizar esse material em sala de aula.

2 Inclusão

Quando falamos em inclusão nos remetemos à inclusão escolar, e estamos tratando de uma inserção na íntegra. Em seu texto, Mantoan reforça essa ideia de que:

> A inclusão causa uma mudança de perspectiva educacional, pois não se limita a ajudar somente os alunos que apresentam dificuldades na escola, mas apoia a todos: professores, alunos, pessoal administrativo, para que obtenham sucesso na corrente educativa geral (MANTOAN, 1993, p. 3).

Para que uma escola possa ser considerada inclusiva, é imprescindível que ela proporcione a todos os seus alunos uma modalidade de ensino única, com as condições necessárias para que os mesmos possam desenvolver suas competências e habilidades, alcançando assim a aprendizagem.

> Uma modalidade de ensino única reduz as chances de se encaminhar os problemas e as dificuldades para ensinar algumas crianças, com ou sem deficiências, em ambientes à parte e remete os problemas de ensino às escolas, aos professores, à estrutura e ao funcionamento geral dos sistemas. Essa situação desafiadora, faz com que se ultrapassem os limites pedagógicos e administrativos das escolas, na direção da inclusão (MANTOAN, 2012, p. 12).

Um aluno com deficiência pode representar uma grande incitação para a instituição de ensino, pois ele desafia não somente a instituição, mas também os profissionais que dela fazem parte, como é o caso dos professores, que podem ver na presença desse aluno um desafio para suas estratégias de ensino. No entanto, Nogueira (2019, p. 13) afirma que "[...] é fundamental que o professor compreenda que a presença de um aluno com necessidades educativas especiais em sua sala de aula não implica necessariamente em um fator complicador de sua prática pedagógica".

Em concordância com Mantoan "[...] A meta da inclusão é, desde o início não deixar ninguém fora do sistema escolar, que terá de se adaptar às particularidades de todos os alunos" (MANTOAN, 1993, p. 3).

Nesse sentido, podemos nos perguntar, *seria a sala de recursos multifuncionais um ambiente que segrega os alunos da sala de aula regular? Qual seria a melhor estratégia de ensino para garantir o acesso à educação de qualidade para todos?* Essas perguntas mostram a importância de se discutir sobre Educação Inclusiva no processo de formação inicial e continuada de professores.

> O ensino dicotomizado em regular e especial, define mundos diferentes dentro das escolas e dos cursos de formação de professores. Essa divisão perpetua a idéia de que o ensino de alunos com deficiência e com dificuldades de aprendizagem exige conhecimentos e experiência que não estão à altura dos professores regulares (MANTOAN, 2012, p.10).

Além de aprender a respeitar as diferenças, é preciso preparar os professores do ensino regular para lidarem com situações que envolvem estudantes com necessidades especiais. É preciso que os professores sintam-se confiantes em ensinar todos os alunos.

Dentre as diversas necessidades especiais que os professores se deparam, a cegueira e a baixa visão se destacam, uma vez que há uma grande quantidade de pessoas que possuem algum grau de perda visual. Nesse contexto, as crianças que apresentam cegueira ou limitações visuais bastante agravadas são comprometidas com a interação visual que os professores, em geral, utilizam. Por exemplo, o uso sistemático da lousa e de datashow.

De acordo com os dados apresentados pelo Ministério da Educação sobre deficiência visual, sabemos que:

> [...] segundo dados do censo demográfico do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) de 2010, 18,6% da população brasileira possui algum tipo de deficiência visual. Desse total, 6,5 milhões apresentam deficiência visual severa, sendo que 506 mil têm perda total da visão (0,3% da população) e 6 milhões, grande dificuldade para enxergar (3,2%) (BRASIL, 2018, n.p).

A cegueira é definida por Junior e Oliveira (2016, p. 27), como "[...] uma comorbidade debilitante que acomete milhões de crianças no Brasil e no mundo", podendo ela ser congênita, quando o sujeito já nasce cego, ou adquirida, quando se perde a visão com o passar do tempo. De acordo com Lourenço *et al.* (2020, p. 1), podemos entender a cegueira como "[...] a alteração grave ou total de uma ou de várias funções elementares da visão. Esta condição afeta de maneira incorrigível, a capacidade de perceber cor, tamanho, distância, forma, posição ou movimento em um campo mais ou menos abrangente". Já a baixa visão é definida por Lourenço *et al.* (2020, p. 2) "[...] corresponde a um comprometimento do funcionamento visual, em ambos os olhos, que não pode ser sanado, por exemplo, com o uso de óculos convencionais, lentes de contato ou cirurgias oftalmológicas."

Sendo assim, sujeitos com a mesma acuidade visual[1] e campo de visão[2] podem apresentar diferentes níveis de funcionamento visual (MENDONÇA et al., 2008).

Isso ocorre, pois, o funcionamento visual sofre constantes interferências do ambiente externo e também, porque cada indivíduo manifesta fatores pessoais distintos. Sendo assim, o produto resultante dos fatores pessoais e ambientais podem interferir de maneira negativa ou agravante no funcionamento visual (MENDONÇA *et al.*, 2008).

Não havendo essa possibilidade de imitação, a comunicação se dá por meio do não visual. Com isso, o sujeito desenvolve suas capacidades sociais parcialmente a longo prazo. É preciso recorrer a uma série de combinações de informações para que se possa formar a ideia de um todo, como a oralização e o contato tátil (MENDONÇA *et al.*, 2008).

Quando nos voltamos para a educação escolar e a socialização das crianças cegas ou de baixa visão, precisamos compreender que nem sempre as mesmas situações que são utilizadas para os videntes promovem interação com o ambiente externo. Gerar situações que despertam a curiosidade e que permitam essa exploração auxiliam não apenas os indivíduos com deficiências visuais, mas também os videntes. Em casos onde a visão encontra-se mais preservada, é interessante que seja estimulado o uso da descrição e distinção daquilo que se está vendo (MENDONÇA *et al.*, 2008).

De modo que os impactos ocasionados pela deficiência visual ou baixa visão possam ser minimizados, há uma série de atitudes e medidas, consideradas simples, que podem ser adotadas dentro do ambiente escolar. De acordo com Mendonça *et al.* (2008, p. 18), essas adaptações podem dar-se a partir de estratégias de organização em sala de aula a elaboração de materiais inclusivos.

No caso das adaptações ambientais, é interessante que o professor adote algumas medidas: fazer a leitura daquilo que está sendo exposto no quadro/projetor, narrar a ordem dos fatos que acontecem em sala de aula, alertar o aluno quanto às mudanças que podem ocorrer no ambiente e na disposição dos alunos, evitar que o reflexo da luz atinja o quadro e a superfície de estudos do aluno, utilizar cores de maior contraste, entre outras (MENDONÇA *et al.*, 2008).

No caso dos materiais manipuláveis inclusivos, é interessante que o professor utilize de recursos tecnológicos que provêm do reconhecimento de voz, sistema braille de escrita, ou ainda, que sejam feitas as adaptações necessárias para atender as demandas do aluno, como aumentar a fonte de textos em alguns casos (MENDONÇA *et al.*, 2008).

Vale ressaltar que, nenhuma dessas medidas são eficazes sem antes conversar com o aluno. É preciso, antes mesmo de tomar qualquer atitude, acolhê-lo para que ele se sinta à vontade em expressar quais são suas dificuldades e qual adaptação é necessária e suficiente para sua compreensão.

Uma vez apresentados o que entendemos por inclusão e deficiência visual, descrevemos na próxima seção o processo de produção do material inclusivo.

[1]Medida clínica de nitidez da visão para a discriminação de pormenores a uma distância especifica (MENDONÇA *et al.*, 2008, p. 11).

[2]Distância angular abrangida quando olhamos um ponto no infinito mantendo estáticos os olhos e a cabeça. A parte central, abrangida simultaneamente por ambos os olhos, corresponde ao campo visual central. O campo periférico refere-se à restante área, de ambos os lados do campo central, só abrangida por um dos olhos (MENDONÇA *et al.*, 2008, p. 11).

3 O processo de produção do material

O processo de produção do material começou a partir da disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática, cujo principal objetivo é criar e discutir materiais manipuláveis. A partir dessa experiência, nos foi apresentado um material voltado para ensino das operações de soma, subtração e multiplicação de números inteiros, material este, desenvolvido pelos pesquisadores do CDCC/USP.

Como processo de aprendizagem, um novo material foi confeccionado, utilizando folha de papel EVA (Figura 1). Esse jogo, tinha as mesmas características de um jogo de dominó, uma vez, uma peça complementava outra; a diferença é que só haviam dois modelos de peças, as que representavam os números positivos e as que representavam os números negativos.

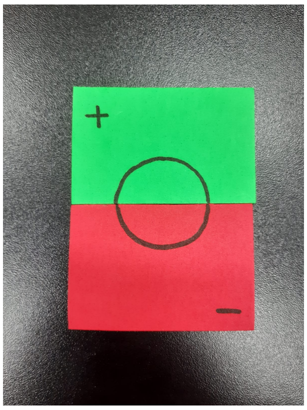


Figura 1: Peça do jogo
Fonte: da pesquisa

As peças, tal como mostra a imagem anterior (Figura 1), representam o zero, que se dá a partir de uma relação de simetria entre (1)+(-1). Sendo assim, à medida em que são agrupadas peças positivas ou negativas, novas representações podem ser estabelecidas e, por consequência, operações também podem ser realizadas.

Na disciplina de Tecnologias no Ensino da Matemática, uma das propostas é trabalhar com a produção de materiais utilizando tecnologias assistivas. Nesse contexto, o jogo criado na disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática serviu como base para a adaptação do mesmo a situações que envolviam alunos cegos.

O processo de adaptação se deu inicialmente pela pesquisa de como Braille poderia representar os símbolos e operações do jogo. Uma vez que esse passo foi finalizado, a próxima etapa foi a modelagem das peças a serem confeccionadas na impressora 3D, modelo Ender Creality v3. A modelagem foi realizada pelo *software* gratuito *Tinkercad*[3].

Uma vez modeladas as peças, o processo seguinte foi utilizar outro *software*, o Ultimaker Cura[4], para transformar os arquivos .stl (padrão de objetos tridimensionais) (Figura 2) em .g-code (formato de arquivo utilizado por impressoras 3d).

[3]TINKERCAD. Disponível em: <https://www.tinkercad.com/>. Acesso em: 23 mar. 2023.
[4]ULTIMAKER CURA. Disponível em: <https://ultimaker.com/software/ultimaker-cura>. Acesso em: 23 mar. 2023.

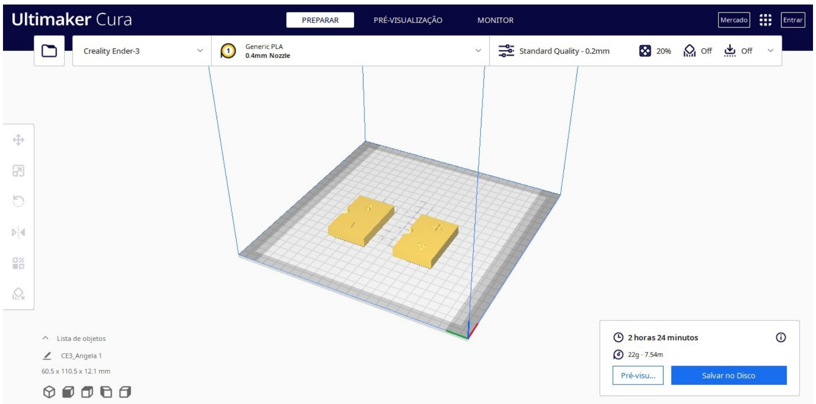


Figura 2: Peças modeladas no *TinkerCad*
Fonte: da pesquisa

Na Figura 2, temos o exemplo de duas peças sendo submetidas ao *software* Cura para serem fatiadas e transformadas em um arquivo .g-code. É possível verificar que as peças se assemelham a paralelepípedos. Nesse caso, as medidas utilizadas na confecção das peças foram: 40mm de largura, 60mm de comprimento e 12mm de altura.

Na parte superior de cada uma delas é possível ver os sinais de soma e subtração em alto relevo. Ao lado de cada um dos sinais encontra-se sua respectiva representação de escrita em braile, com alto relevo. Para que as peças pudessem se completar, a partir da parte em baixo relevo, há um quarto de uma esfera na parte superior de cada peça.

Uma vez que os arquivos estavam prontos, o processo seguinte foi de confeccionar cada peça na impressora 3D. O material utilizado na produção foi o PLA, um tipo de termoplástico biodegradável de origem natural (3DLAB, 2022). Ao todo foram confeccionadas 12 peças, sendo metade delas positivas e a outra metade negativas. O tempo empregado para a confecção foi de aproximadamente 24 horas.

A partir do material produzido, um plano de aula foi elaborado para mostrar como esse jogo pode ser utilizado em sala de aula. Na próxima seção trazemos a discussão sobre o uso desse material.

4 Discussões sobre a utilização do material em sala de aula

Haja vista a confecção do material, ele pode ser aplicado em turmas de 7° ano, visto que após uma pesquisa realizada por nós na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) referente ao ensino de números inteiros, encontramos as informações contidas no Quadro 1.

Disciplina	Série	Unidade Temática	Objetos do Conhecimento	Habilidades
Matemática	7°	Números	Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações	**(EF07MA03)** Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração. **(EF07MA04)** Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

Quadro 1: Ensino do conjunto dos Números Inteiros
Fonte: (BRASIL, 2018)

Uma vez que os alunos consigam ordenar os números inteiros e consigam associá-los a pontos da reta numérica, podemos utilizá-los em operações. Sendo assim, estimamos uma duração de 5 horas-aula para se trabalhar e discutir as operações de adição, subtração e multiplicação envolvendo os números inteiros, a partir do material.

Inicialmente, o professor deve auxiliar o aluno a compreender a representação de números inteiros a partir das peças. Por exemplo, o 0 (zero) pode ser representado com a junção de uma peça positiva e outra negativa (Figura 3).

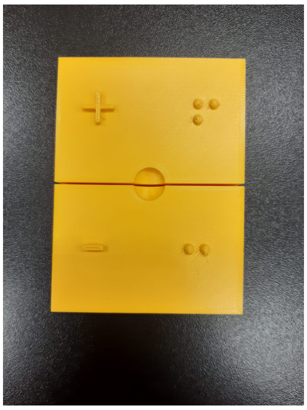


Figura 3: Representação do 0 (zero)
Fonte: da pesquisa

Em geral, o zero é tratado como sendo a representação do nada, do vazio, uma interpretação que se dá por meio da ausência de quantidade. No caso da Figura 3, ocorre a junção de uma peça positiva com uma peça negativa, ou seja, a representação aqui é dada a partir da relação de simetria. De maneira similar, para representar o número 5, é necessário utilizar cinco peças positivas (Figura 4a) ou seis peças positivas e uma peça negativa (Figura 4b).

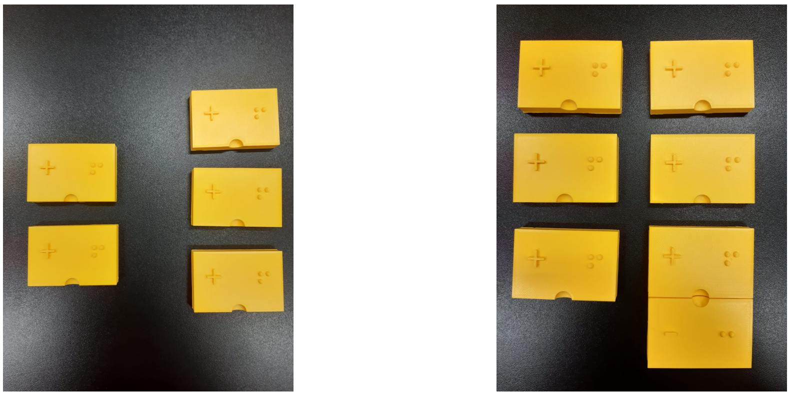


Figura 4: Representação do número 5
Fonte: da pesquisa

A representação apresentada na Figura 4 permite introduzir a operação de adição por meio de agrupamento, de forma que, por exemplo, para somar 2 e 3, é necessário agrupar uma representação do número 2 com uma representação do número 3.

Se a operação em questão envolve a soma de um inteiro positivo com um inteiro negativo, é importante que o professor indique a necessidade de conectar as peças que formam zero, por exemplo, a soma do número 2 com o número -1, pode ser representada conforme a Figura 5.

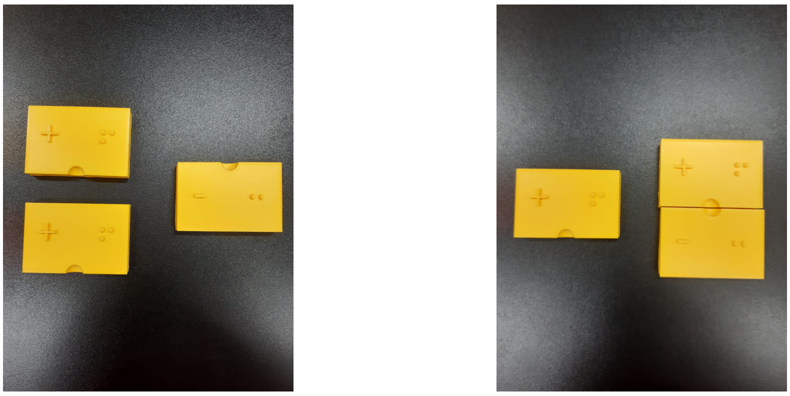


Figura 5: Representação da subtração 2+(-1)
Fonte: da pesquisa

De maneira similar à soma, a subtração pode ser introduzida a partir do sentido de retirada (quando um conjunto perde elementos), de modo que subtrair uma quantidade é removê-la de uma representação (Figura 6).

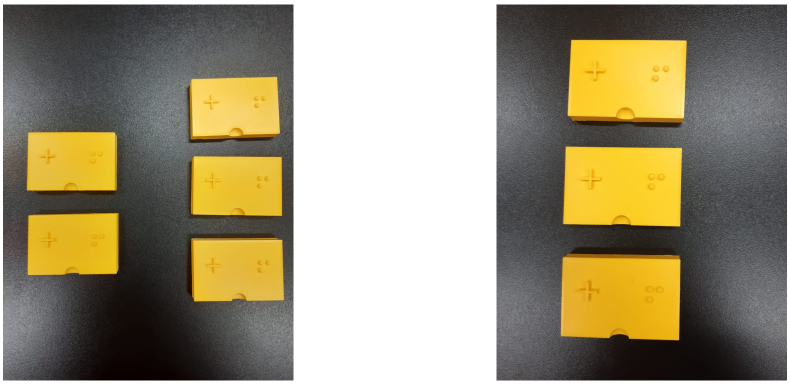


Figura 6: Representação da subtração 5-2
Fonte: da pesquisa

É interessante utilizar este material para justificar como funciona a subtração de um número negativo. A subtração de 2-3 pode levar o aluno a refletir sobre a necessidade de utilizar grupos de 0 na representação do número 2 para remover as peças dadas (Figura 7).

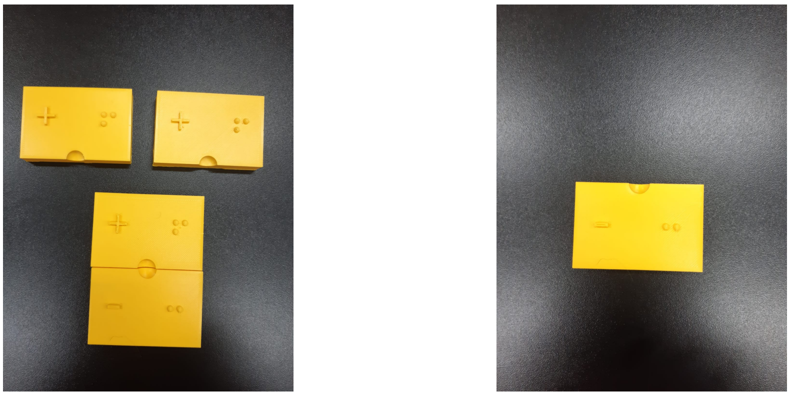


Figura 7: Representação da subtração 2-3
Fonte: da pesquisa

Para trabalhar a multiplicação, sugerimos a utilização da disposição retangular, convencionando, por exemplo, que em uma operação a·b, o número à esquerda (a) representa a quantidade de grupos a serem adicionados ou subtraídos e o número à direita (b) representa a quantidade de peças que cada um dos grupos deve possuir.

Assim, partimos do 0 (que podemos representar por meio da ausência de peças ou utilizando as peças a partir da relação de simetria) e adicionamos ou subtraímos grupos conforme necessário.

Quando a multiplicação envolve um número positivo à esquerda, tem-se a noção usual de disposição retangular de modo que, por exemplo, 2·3 poderia ser representado como 2 grupos de 3 peças positivas e 2·(-3) poderia ser representado como 2 grupos de 3 peças negativas (Figura 8).

Figura 8: Representação de 2·(-3)
Fonte: da pesquisa

Desse modo, quando o número à esquerda for negativo, deve-se retirar uma quantidade de grupos. Assim, para representar (-2)·3, seria necessário retirar 2 grupos de 3 peças positivas, e de forma análoga, para representar (-2)·(-3) retiram-se 2 grupos de 3 peças negativas. Para que estas representações sejam possíveis, é necessário partir de uma representação do 0 que envolva peças complementares (Figura 9).

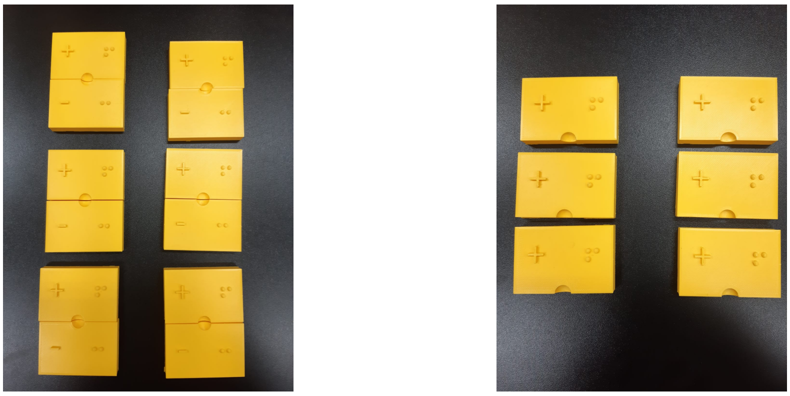


Figura 9: Representação da operação (-2)·(-3) a partir da representação do 0
Fonte: da pesquisa

A partir dessas discussões, as operações de soma, subtração e multiplicação envolvendo os números inteiros estão definidas.

5 Considerações Finais

Tendo em vista a dificuldade de ensinar Matemática para todos, apresentamos na disciplina de Tecnologias no Ensino da Matemática a ideia de confeccionarmos um material inclusivo, utilizando de tecnologias assistivas.

Sendo assim, recorremos à utilização de uma impressora 3D modelo Ender Creality v3 capaz de imprimir o material confeccionado por nós no site para computador *Tinkercad*. Trata-se de peças semelhantes às peças do dominó no sentido de se completar, no entanto, há apenas dois modelos de peças, as positivas e as negativas. A fim de obter um material inclusivo, utilizamos da escrita em braile para representar os sinais em cada uma das peças.

A partir da utilização desse material, discussões podem ser feitas com os alunos em torno das operações de adição, subtração e multiplicação envolvendo as representações (agrupamento de peças) dos números inteiros.

Além disso, é possível ainda explorar as operações contidas em expressões numéricas, incluindo, por exemplo, a divisão, fazendo uma análise detalhada de como operar com o material em dadas situações.

6 Referências

3DLAB. **PLA:** tudo o que você precisa saber sobre o filamento PLA, 2022. Disponível em: <https://3dlab.com.br/pla-tudo-o-que-voce-precisa-saber-sobre-o-filamento-pla/\T1\O_que_e_material_PLA.> Acesso em: 22 mar. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 24 mar. 2023.

COUTO, Abelardo Junior; OLIVEIRA, Lucas Azeredo Gonçalves de. As principais causas de cegueira e baixa visão em escola para deficientes visuais. **Revista Brasileira de Oftalmologia**, v. 75, p. 26-29, 2016. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbof/a/pYdszvTh6tPwRH3B4fXmKLb/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 24 mar.2023.

Data reafirma os direitos das pessoas com deficiência visual. **Ministério da Educação**, 2018. Disponível em: <https://shre.ink/kAdt>. Acesso em: 24 mar. 2023.

FAUSTINO, Ana Carolina; MOURA, Amanda Queiroz; SILVA, Guilherme Henrique Gomes da; MUZINATTI, João Luiz; Skovsmose, Ole. Macroinclusão e microexclusão no contexto educacional. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 12, n. 3, p. 898-911, 2018. Disponível em: <http://educa.fcc.org.br/pdf/ree/v12n3/1982-7199-ree-12-03-898.pdf>. Acesso em: 24 mar. 2023.

MENDONÇA, Alberto; MIGUEL, Cristina; NEVES, Graça; MICAELO, Manuela; REINO, Vitor. **Alunos cegos e com baixa visão**. Orientações curriculares. DGIDC/DSEEASE, 2008. Disponível em: <https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/EEspecial/publ_alunos_cegos.pdf>. Acesso em: 24 mar. 2023.

MANTOAN, Maria Teresa Eglér. **Integração x Inclusão:** Escola (de qualidade) para Todos. Universidade Estadual de Campinas, Laboratório de Estudos e Pesquisas em Ensino e Diversidade-LEPED/UNICAMP, 1993. Disponível em: <http://www.mpgo.mp.br/portalweb/hp/41/docs/integracao_x_inclusso_escola_de_qualidade_para_todos.pdf>. Acesso em: 29 mar. 2023.

MANTOAN, Maria Teresa Eglér. **A educação especial no Brasil:** da exclusão à inclusão escolar. Universidade Estadual de Campinas. Unicamp, v. 25, 2002. Disponível em: <https://www.inesul.edu.br/professor/arquivos_alunos/doc_1441311060.pdf>. Acesso em: 29 mar. 2023.

Material Didático do CDCC. USP. Disponível em: <https://cdcc.usp.br/materialdidatico/>

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. Educação matemática e educação especial na perspectiva inclusiva: educação matemática inclusiva? In: XIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá. **Anais Eletrônicos** [...] Local: Editora, Ano. v. 13 p. 1-14, 2019.

LOURENÇO, Erica A. Garrutti de; FIDALGO, Sueli Salles; MALHEIRO, Cícera A. Lima, CAMPOS, Sandra R. Leite de. **Acessibilidade para Estudantes com Deficiência Visual:** orientações para o ensino superior. 1° edição. UNIFESP. Unifesp: Portal de acessibilidade, 2020. E-book.

TINKERCAD. Disponível em: <https://www.tinkercad.com/>. Acesso em: 23 mar. 2023.

ULTIMAKER CURA. Disponível em: <https://ultimaker.com/software/ultimaker-cura>. Acesso em: 23 mar. 2023.

Visualização da caracterização geométrica de operadores autoadjuntos no plano

Isadora Vanzella Picinini
UTFPR
isadoravanzella@alunos.utfpr.edu.br

Angela de Cesaro
UTFPR
angelacesaro@alunos.utfpr.edu.br

Suellen Ribeiro Pardo Garcia
UTFPR
suellenpardo@utfpr.edu.br

Resumo

Tendo em vista que a rejeição dos alunos e o número de reprovações na disciplina de Álgebra Linear pode estar correlacionado com o uso de uma abordagem de ensino puramente algébrica, o trabalho em questão visa propor uma maneira de visualizar o efeito de operadores autoadjuntos, muito importantes para a disciplina, utilizando o software Geogebra. Para isso, foram explorados alguns teoremas de modo a concluir que é possível descrever o efeito geométrico de tais operadores por meio de rotações e dilatações, o que permitiu, assim, o desenvolvimento de uma sequência no Geogebra utilizando estas operações para descrever o efeito desejado.

Palavras-chave: Álgebra Linear. Operadores autoadjuntos. Representações semióticas. Geogebra.

1 Introdução

A adversidade em compreender a Matemática pode ser proveniente da complexidade de se distinguir um objeto matemático de sua representação e, consequentemente, da dificuldade em realizar os chamados tramentos de dados. Isso ocorre pois os objetos não estão a um nível de percepção imediata ou intuitiva, portanto, é necessário dar a eles representações que, inevitavelmente, não podem ser confundidas [1].

Os tratamentos de dados por sua vez dependem diretamente da representação utilizada; alguns desses tratamentos só serão possíveis após a interiorização das representações semióticas. Sendo assim, um único objeto precisa ser reconhecido nas suas mais distintas representações para total compreensão conceitual do objeto [1][2].

As representações devem contemplar três atividades cognitivas que se relacionam com a *semiósis* e com a *noésis*: a formação, o tratamento e a conversão. São essas três atividades cognitivas que vão auxiliar da produção do registro, utilizando de um ou mais signos para elaborar uma representação mental, e também nas mudanças de forma e conteúdo [2].

O fato de existir uma diversidade de registros faz com que possamos realizar mudanças entre eles. Duval ressalta que “compreender matemática significa transitar e coordenar ao menos dois registros de representação semiótica"[1]. O registro quando elaborado de forma adequada para a realização dos tratamentos contribui sinificatimente para com o raciocínio e, por sua vez, com a aprendizagem [3].

No Brasil, o discernimento acerca dos registros de representação semiótica na aprendizagem matemática ganham espaço no inicio da década de 1990, tornando-se assim, o principal referencial teórico das pesquisas realizadas em meados de 1995.

Dessa forma, entende-se que para ter acesso a compreensão matemática é necessário utilizar-se de diversas representações que devem estar relacionadas ao pensamento cognitivo dos discentes. As representações podem, ainda, auxiliar o professor de matemática quanto as metodologias a serem empregadas na sala de aula a fim de amenizar as dificuldades de aprendizagem.

O objetivo deste trabalho é, portanto, dar uma caracterização geométrica a operadores auto-adjuntos de modo a possibilitar a visualização do efeito destes operadores em vetores do plano, utilizando o software Geogebra, a fim de manifestar suas representações.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Tipos especiais de operadores lineares

Definição 2.1 (Operadores autoadjuntos)**.** *Seja $T : V \to V$ um operador linear e α uma base de V, este operador é chamado de autoadjunto se a matriz $[T]_\alpha^\alpha$ que o representa é uma matriz simétrica, ou seja, se $[T]_\alpha^\alpha = ([T]_\alpha^\alpha)^t$. Os operadores autoadjuntos aparecem naturalmente em problemas que envolvam simetria e em outras situações como em Mecânica Quântica, onde estão normalmente associados a considerações sobre energia do sistema. Uma propriedade importante dos operadores autoadjuntos que será utilizada é que tais operadores preservam o produto interno* [4].

Definição 2.2 (Operadores ortogonais)**.** *Seja $T : V \to V$ um operador linear e α uma base de V, este operador é chamado de ortogonal se a matriz $[T]_\alpha^\alpha$ que o representa é uma matriz ortogonal, ou seja, se $([T]_\alpha^\alpha)^{-1} = ([T]_\alpha^\alpha)^t$. Exemplos de aplicação de operadores ortogonais aparecem na Dinâmica dos Corpos Rígidos, em problemas de rotação e translação.*

2.2 Propriedades

Teorema 2.1 (Ortogonalidade dos vetores coluna de uma matriz ortogonal)**.** *Uma matriz é dita ortogonal se e somente se suas linhas (ou colunas) são vetores ortonormais* [5].

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Chamando seus vetores coluna de v_k, tem-se que $v_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$.

Por hipótese, A é ortogonal, portanto, $A^tA = I$.

$$A^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + \cdots + a_{n1}^2 & \dots & a_{11}a_{1n} + \cdots + a_{n1}a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}a_{11} + \cdots + a_{nn}a_{n1} & \dots & a_{1n}^2 + \cdots + a_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Como $\langle v_i, v_j \rangle = 1$ se $i = j$ e $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ se $i \neq j$, segue que os vetores coluna de A são ortonormais.

($\Longleftarrow$) Se os vetores coluna v_k da matriz A são ortonormais, segue que

$$\begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = A^tA$$

Portanto, A é ortogonal.

Teorema 2.2 (Diagonalização de operadores autoadjuntos)**.** *Um operador é autoadjunto se e somente se existir uma base β de vetores ortonormais em relação à qual $[T]_\beta^\beta$ é diagonal* [6].

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Primeiro, podemos demonstrar que todos os autovalores de uma matriz auto-adjunta são reais. Para isso, lembramos a definição de conjugado de um número complexo: se z é um número complexo tal que $z = a + bi$, então seu conjugado é $\bar{z} = a - bi$. Mostrar que um número z é real é equivalente a mostrar que $z = \bar{z}$, uma vez que isso só é possível se $b = 0$. Definimos, portanto, o conjugado de uma matriz $A = [a_{ij}]$ como $\bar{A} = [\overline{a_{ij}}]$. Se A é uma matriz de valores reais, então $A = \bar{A}$.

Considere um autovalor λ associado a um vetor v de uma matriz A com entradas reais. Como $Av = \lambda v$, tomando o conjugado complexo, temos $\overline{Av} = \overline{\lambda v}$.

Suponha $v = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{bmatrix}$. Seu conjugado será dado por: $v = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 i \\ \vdots \\ a_n - b_n i \end{bmatrix}$, e assim, $\bar{v}^t v = a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_n^2 + b_n^2$, ou seja, $\bar{v}^t v \neq 0$ se $v \neq 0$. Segue que:

$$\lambda \bar{v}^t v = \bar{v}^t \lambda v = \bar{v}^t A v$$

Como A é auto-adjunta e, portanto, simétrica:

$$\bar{v}^t A v = \bar{v}^t A^t v = (A\bar{v})^t v$$

Mas A é uma matriz de coeficientes reais:

$$(\bar{A}\bar{v})^t v = (\bar{\lambda}\bar{v})^t v = \bar{\lambda}\bar{v}^t v$$

Portanto, $\lambda\bar{v}^t v = \lambda\bar{v}^t v$, e assim, $\lambda = \lambda$, ou seja, os autovalores de uma matriz auto-adjunta com coeficientes reais também serão reais.

Mostrando, agora, que dois autovetores v_1, v_2 de A associados a autovalores λ_1, λ_2 distintos são ortogonais:

$$\lambda_1 v_1^t v_2 = (\lambda_1 v_1)^t v_2 = (Av_1)^t v_2 = v_1^t A^t v_2$$

Mas como A é auto-adjunta:

$$v_1^t A^t v_2 = v_1^t A v_2 = v_1^t \lambda_2 v_2 = \lambda_2 v_1^t v_2$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, segue que $v_1^t v_2 = \langle v_1, v_2\rangle = 0$ e portanto, $v_1 \perp v_2$.

Como sabemos que uma matriz 1×1 já é diagonal, se mostrarmos que um operador autoadjunto de dimensão k ser diagonalizável implica que um operador autoadjunto de dimensão $k+1$ também será, teremos mostrado, por indução, que todo operador autoadjunto é diagonalizável. Portanto, considere $n = k+1$ e uma matriz simétrica $A_{n\times n}$. Como A é autoadjunta, sabemos que seus autovalores serão reais. Considere então um vetor unitário v_1 associado a λ_1. Podemos completar o conjunto $\{v_1\}$ para uma base ortonormal $\{v_1, \dots v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.

Considere uma matriz Q_1 com colunas v_i, isto é, $Q_1 = \begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \end{bmatrix}$. Como os vetores coluna de Q são ortonormais, Q_1 será ortogonal.

$$Q_1^t A Q_1 = \begin{bmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Av_1 \dots Av_n \end{bmatrix}$$

$$Q_1^t A Q_1 = \begin{bmatrix} \langle v_1, Av_1\rangle & \langle v_1, Av_2\rangle & \dots & \langle v_1, Av_n\rangle \\ \langle v_2, Av_1\rangle & \langle v_2, Av_2\rangle & \dots & \langle v_2, Av_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, Av_1\rangle & \langle v_n, Av_2\rangle & \dots & \langle v_n, Av_n\rangle \end{bmatrix}$$

Como A é uma matriz autoadjunta, $\langle v_i, Av_j\rangle = \langle Av_i, v_j\rangle = \langle v_j, Av_i\rangle$ e, portanto, $Q_1^t A Q_1$ é simétrica. Além disso, temos que $Av_1 = \lambda_1 v_1$, e portanto, $\langle v_i, Av_1\rangle$ será λ_1, se $i = 1$ e 0 caso contrário.

$$Q_1^t A Q_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle v_2, Av_2\rangle & \dots & \langle v_2, Av_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle v_n, Av_2\rangle & \dots & \langle v_n, Av_n\rangle \end{bmatrix}$$

É possível então representar a matriz $Q_1^t A Q_1$ em blocos:

$$Q_1^t A Q_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right] = B$$

Onde A_1 é uma matriz simétrica $k \times k$. Vamos assumir, então, que é possível diagonalizá-la ortogonalmente, ou seja, podemos escrever A_1 como PDP^t, onde D é uma matriz diagonal e P uma matriz ortogonal.

Considere então uma matriz $Q_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right]$ e uma matriz $Q = Q_1Q_2$. Note que como Q_1 e Q_2 são ortogonais, Q também será.

$$Q^tAQ = (Q_1Q_2)^tAQ_1Q_2 = Q_2^tQ_1^tAQ_1Q_2 = Q_2^tBQ_2$$

$$Q_2^tBQ_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^t \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right]$$

$$Q_2^tBQ_2 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & P^tA_1P \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right]$$

Como existe uma matriz ortogonal Q tal que Q^tAQ é diagonal, conclui-se que A_1 ser ortogonalmente diagonalizável implica que A também será, e portanto, que todo operador autoadjunto com coeficientes reais é ortogonalmente diagonalizável.

($\Longleftarrow$) Suponha α a base canônica de V e uma transformação $T : V \to V$ dada por $[T]_\alpha^\alpha$ para a qual é possível encontrar uma base ortonormal de autovetores. Como $[I]_\alpha^\beta$ é ortogonal, $[T]_\alpha^\alpha$, portanto, pode ser escrita como:

$$[T]_\alpha^\alpha = [I]_\alpha^\beta \, [T]_\beta^\beta \, ([I]_\alpha^\beta)^t$$

$$([T]_\alpha^\alpha)^t = ([I]_\alpha^\beta \, [T]_\beta^\beta \, ([I]_\alpha^\beta)^t)^t$$

$$([T]_\alpha^\alpha)^t = (([I]_\alpha^\beta)^t)^t \, ([T]_\beta^\beta)^t \, ([I]_\alpha^\beta)^t$$

Como $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonal e, portanto, simétrica, tem-se:

$$([T]_\alpha^\alpha)^t = [I]_\alpha^\beta \, [T]_\beta^\beta \, ([I]_\alpha^\beta)^t = [T]_\alpha^\alpha$$

Como $([T]_\alpha^\alpha)^t = [T]_\alpha^\alpha$, o operador T é autoadjunto.

Teorema 2.3 (Caracterização geométrica de matrizes ortogonais no plano)**.** *Toda matriz ortogonal, em $\mathbb{M}_{2\times 2}$, é uma matriz de rotação ou reflexão através de uma reta.*

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Se $A_{2\times 2}$ é uma matriz de rotação ou reflexão, então A é da forma $A_1 = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ ou $A_2 = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ sen\theta & -cos\theta \end{bmatrix}$.

$$A_1^tA_1 = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos^2\theta + sen^2\theta & cos\theta sen\theta - sen\theta cos\theta \\ cos\theta sen\theta - sen\theta cos\theta & cos^2\theta + sen^2\theta \end{bmatrix} = I$$

$$A_2^tA_2 = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ sen\theta & -cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ sen\theta & -cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos^2\theta + sen^2\theta & cos\theta sen\theta - sen\theta cos\theta \\ cos\theta sen\theta - sen\theta cos\theta & cos^2\theta + sen^2\theta \end{bmatrix} = I$$

Portanto, as formas A_1 e A_2 são ortogonais.

($\Longleftarrow$) Considere uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Se A é ortogonal, então temos que suas colunas são ortonormais, ou seja, $\langle (a,c),(a,c) \rangle = 1$, $\langle (b,d),(b,d) \rangle = 1$ e $\langle (a,c),(b,d) \rangle = 0$. Ou seja, $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$ e $ab + cd = 0$.

Existem, portanto, ângulos θ e α tal que $a = cos\theta, c = sen\theta$ e $b = sen\alpha, d = cos\alpha$.

$$ab + cd = cos\theta sen\alpha + sen\theta cos\alpha = sen(\theta + \alpha) = 0 \Rightarrow \theta + \alpha = k\pi \Rightarrow \alpha = k\pi - \theta$$

$$b = sen\alpha = sen(k\pi - \theta) = sen(k\pi)cos(\theta) - sen(\theta)cos(k\pi)$$

$$d = cos\alpha = cos(k\pi - \theta) = cos(k\pi)cos(\theta) + sen(k\pi)sen(\theta)$$

Para k par:

$$b = -sen(\theta)$$
$$d = cos(\theta)$$

Para k ímpar:

$$b = sen(\theta)$$
$$d = -cos(\theta)$$

Portanto, temos como soluções as matrizes $A_1 = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ sen\theta & -cos\theta \end{bmatrix}$.

2.3 Caracterização geométrica de operadores autoadjuntos no plano

Como todo operador autoadjunto pode ser escrito na forma

$$[T]_\alpha^\alpha = [I]_\alpha^\beta \, [T]_\beta^\beta \, [I]_\beta^\alpha$$

onde $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonal e $[I]_\alpha^\beta, [I]_\beta^\alpha$ são matrizes ortogonais, e portanto, matrizes de rotação, temos que o efeito gerado por tais operadores em um vetor é de rotação, dilatação de cada coordenada e rotação na direção contrária.

3 Visualização do efeito geométrico

Tomaremos a matriz $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ como exemplo.

Para diagonalizá-la, encontraremos seus autovalores e autovetores.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 + 2\lambda - 8 = (\lambda+4)(\lambda-2) = 0$$

Portanto, temos $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = 2$.

Para $\lambda_1 = -4$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \to \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \to L_2 - L_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \to -\frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \to L_2 + L_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Temos então que a matriz $[T]_\alpha^\alpha$ pode ser escrita como

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Note que as matrizes ortogonais envolvidas são matrizes de rotação com $\theta = -45°$ e $45°$, respectivamente.

Com estes resultados, é possível observar o efeito geométrico do operador em questão com a utilização do software Geogebra.

Primeiramente, demarcaremos no plano os pontos $A(0,0)$ e B, que será um ponto aleatório para representar um vetor qualquer. Com o comando $ApplyMatrix(\{\{-1,3\},\{3,-1\}\},B)$, obteremos um ponto B', que é a imagem do vetor AB na transformação $[T]_\alpha^\alpha$.

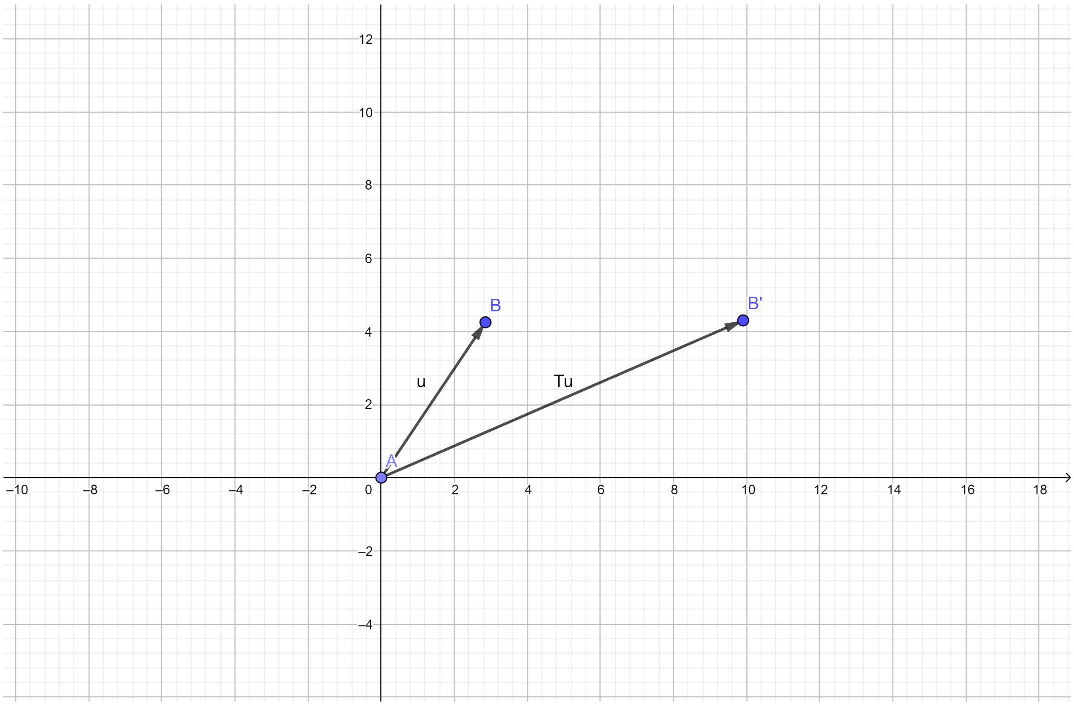


Figura 1: Vetor u e sua imagem, Tu
Fonte: Os Autores (2021).

Utilizando a função 'rotação em torno de um ponto', os pontos A, B e a opção 45° anti horário, iremos obter B_1'. Para que seja possível realizar a dilatação em B_1', encontraremos retas perpendiculares aos eixos que passem por B_1' e suas respectivas intersecções, nomeadas C e D.

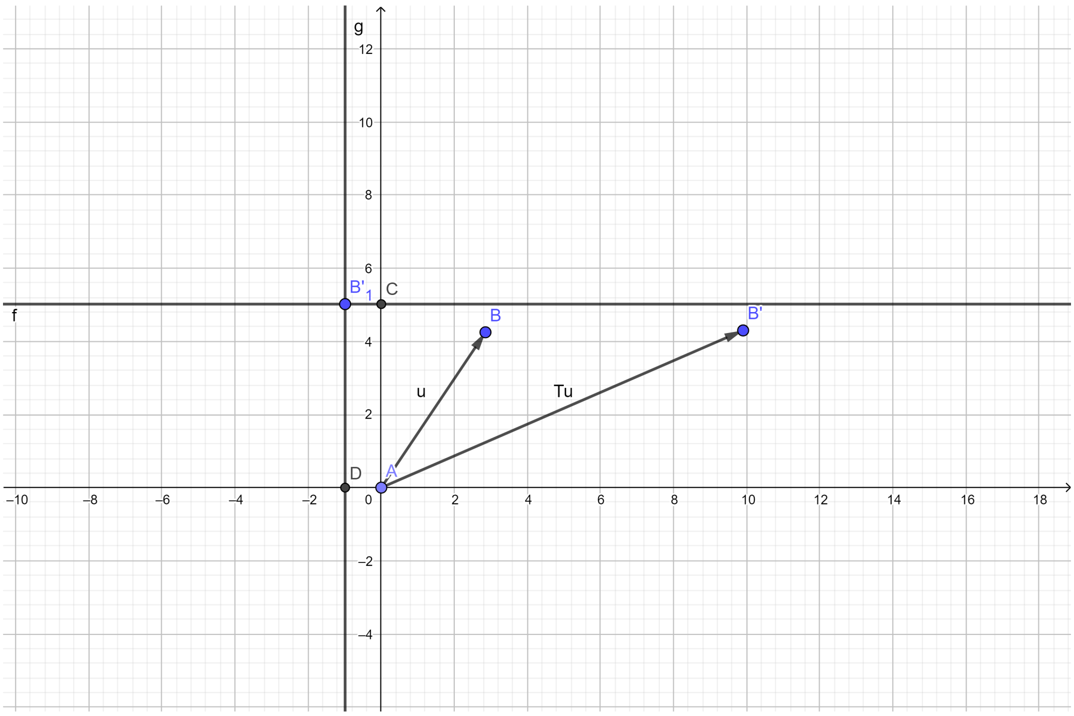


Figura 2: Rotação do vetor u por 45°
Fonte: Os Autores (2021).

Como a matriz $[T]_\beta^\mu$ dilata o vetor B'_1 horizontalmente por um fator -4 e verticalmente por um fator 2, faremos estas dilatações nos pontos C e D, obtendo C' e D'. Utilizaremos retas perpendiculares novamente para encontrar o ponto E, que representa o vetor resultante.

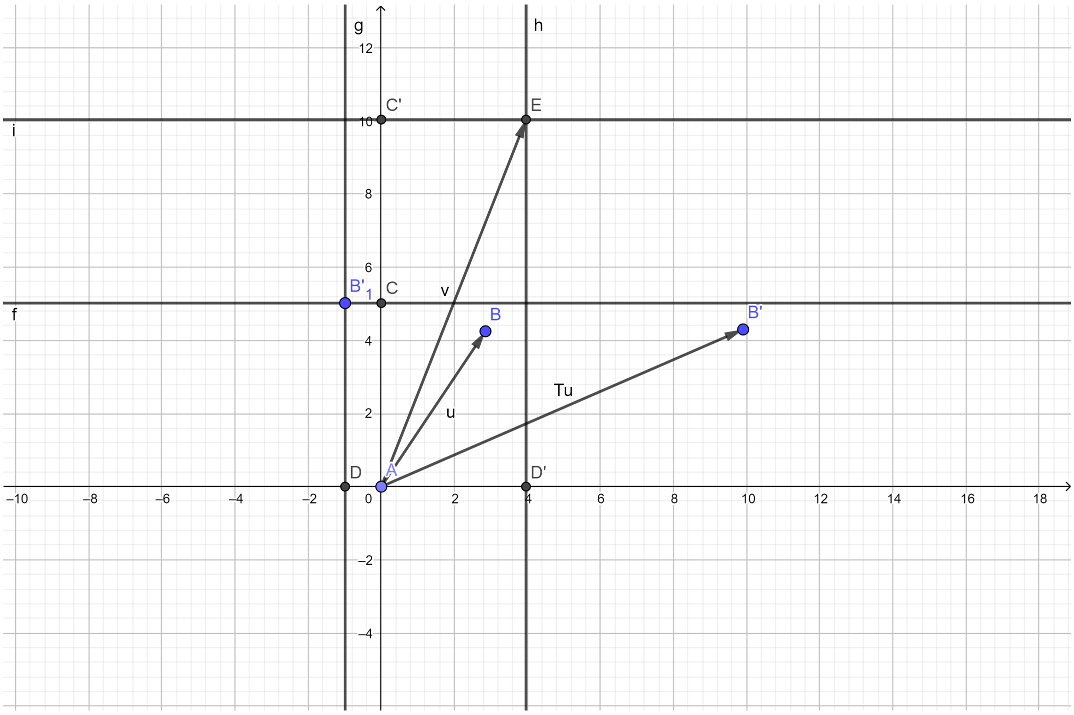


Figura 3: Dilatações das coordenadas do vetor resultante
Fonte: Os Autores (2021).

Por fim, rotacionaremos o ponto E novamente, desta vez, por 45° no sentido horário. Observe que o ponto E' obtido coincide com B', como esperado. Se alterarmos a posição de B, será possível notar que o ponto E', obtido pelos processos de rotação e dilatação, sempre coincidirá com B'.

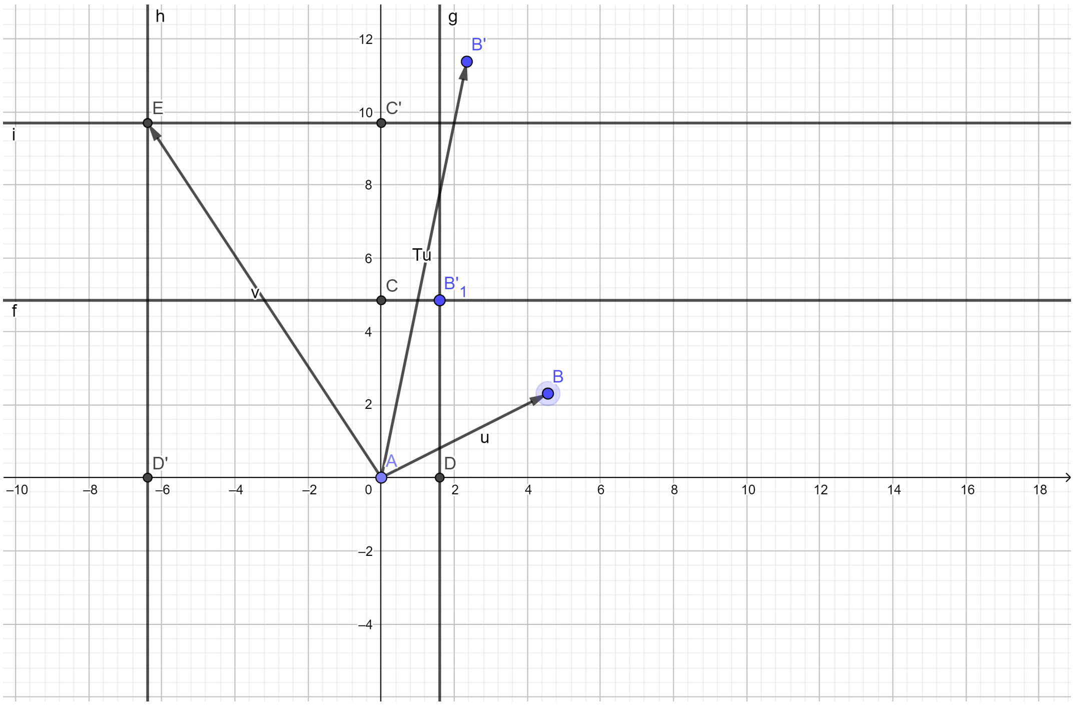


Figura 4: Iniciando com $B(4.56, 2.3)$
Fonte: Os Autores (2021).

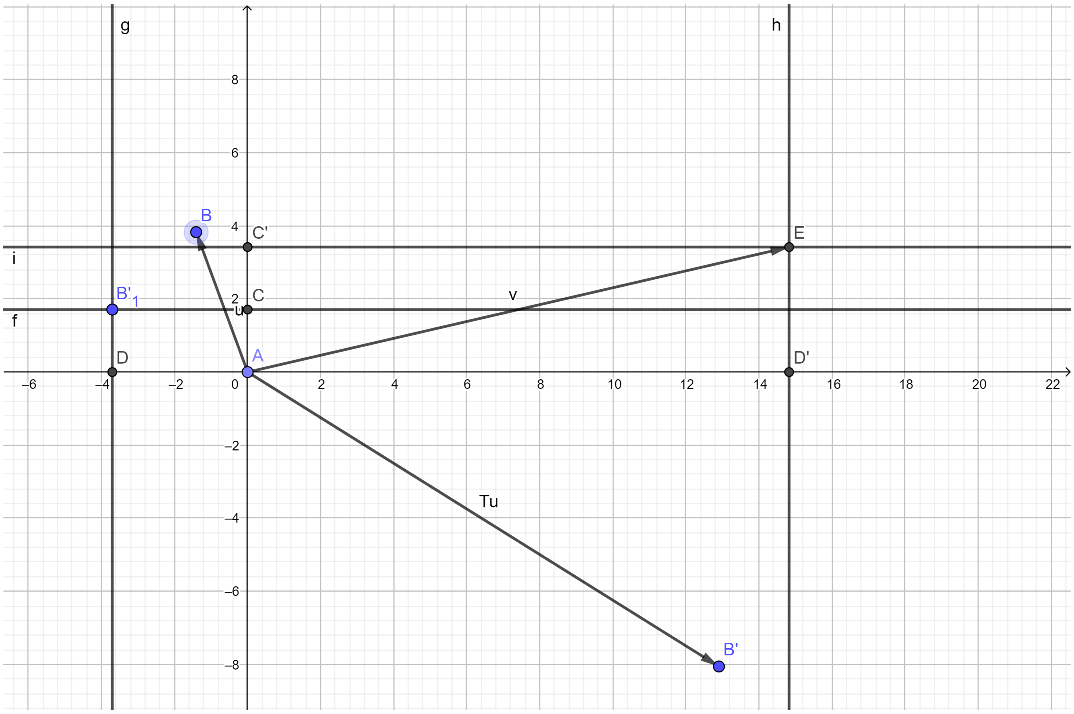


Figura 5: Iniciando com $B(-1.41, 3.83)$
Fonte: Os Autores (2021).

4 Conclusão

Dado o exposto, foi possível compreender que abordar objetos do conhecimento nas suas mais distintas representações se faz importante para melhor compreensão e aprendizagem.

Tendo em vista que a rejeição por parte dos alunos e as reprovações na disciplina de Álgebra Linear podem estar correlacionadas ao fato da abordagem do professor aos conceitos ser de forma predominantemente algébrica, entendemos que na disciplina a representação semiótica, os registros e os tratamentos de dados, quando significados, podem auxiliar na internalização dos conteúdos e na compreensão conceitual, tendo em vista que os discentes apresentam especificidades educacionais distintas.

Com base nos cálculos e no uso do software Geogebra foi possível entender o comportamento dos operadores autoadjuntos no plano, trazendo maior significado para o conteúdo abordado. Assim, esperamos que os docentes que lecionam essa disciplina considerem abordar o conteúdo utilizando softwares como o Geogebra. Com esta finalidade, disponibilizamos a construção feita acima como atividade interativa que pode ser acessada utilizando o QR code abaixo ou pelo link https://www.geogebra.org/m/stqwqu4u.

Referências

[1] Raymond Duval e Méricles Thadeu. "Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento". Em: REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática 7.2 (2012), pp. 266–297.

[2] Celia Finck Brandt e Méricles Thadeu Moretti. "O cenário da pesquisa no campo da educação matemática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica". Em: Perspectivas da Educação Matemática 7.13 (2014).

[3] Janecler Ap Amorin Colombo, Claudia R Flores e Méricles T Moretti. "Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências". Em: Zetetiké 16.1 (2008).

[4] José Luiz Boldrini et al. Álgebra linear. Harper & Row, 1980.

[5] Suellen Ribeiro Pardo Garcia. Livro de Atividades de Álgebra Linear. 2020.

[6] David Poole. Linear algebra: A modern introduction. Cengage Learning, 2014.

UMA APLICAÇÃO DOS MODELOS MATEMÁTICOS DE MONTROLL E CHAPMAN-RICHARDS PARA O GANHO DE PESO DE SUÍNOS

Daiane Luisa Stahlhofer
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Kauana Tomasi
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Adriano Alfredo Schneider
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Jahina Fagundes de Assis Hattori
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resumo

No presente trabalho foram utilizados os modelos matemáticos de Montroll e de Chapman-Richards para estimar o ganho de peso em suínos. Primeiramente foi realizada uma revisão bibliográfica sobre o desenvolvimento dos modelos e a história de seus criadores e também coleta de dados empíricos de pesagem de suínos. A seguir, foram realizadas as aplicações de ambos os modelos no ganho de peso dos suínos. Após as aplicações, foi realizada uma comparação entre os modelos e validação dos resultados por meio do erro relativo e do desvio padrão, concluindo que o modelo que melhor descreve o ganho de peso em suínos é o de Chapman-Richards.

Palavras-chave: Modelagem Aplicada; Modelos Matemáticos; Montroll; Chapman-Richards.

1 Introdução

O estudo de modelos de crescimento populacional possui grande importância para guiar a tomada de decisões em diversas áreas, seja em questões de saúde, planejamento urbano, evolução populacional entre outros (PINHEIRO, 2021, p. 2).

Tais modelos de crescimento são descritos pela modelagem matemática, um método que é utilizado como base para aplicar definições, teoremas e propriedades visando interpretar e resolver problemas. Para Bassanezi (2002), a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. A esta representação de um problema real em linguagem matemática dá-se o nome de modelo matemático.

Entre os modelos de crescimento populacional existentes na literatura podemos destacar: Modelo de Malthus(1798), o modelo de Verhulst (1837), o modelo de Gompertz (1825) e o mais recente entre esses o modelo de Montroll. (Magalhães, 2012).

Estes modelos além de predizerem o crescimento populacional podem ser utilizados em pesquisas para estimar o ganho de peso de animais (LANGARO, 2017; VIDALETTI, 2019;

CRAVO, 2021), crescimento de plantas (CRISTOFERI, 2021) e até mesmo o crescimento de bactérias e de tumores.

O modelo de Montroll, publicado em 1971, por Elliot Waters Montroll, descreve o crescimento populacional a uma taxa que é decrescente em relação ao tamanho da população e não é, necessariamente, um modelo linear. Podemos evidenciar também o modelo de Chapman-Richards, que é frequentemente utilizado na estimação do crescimento florestal, e é uma generalização do modelo de Bertalanffy.

A suinocultura é um dos pilares da economia rural brasileira, e vem ganhando destaque nacional e internacional e tornando-se referência no mercado de trabalho (Sebrae, 2016). Segundo dados do ABCS (2016), a suinocultura brasileira gera 126 mil empregos diretos e mais de 900 mil indiretos. Em 2010, no Brasil, eram produzidas 3,237 milhões de toneladas, já em 2019, esse número aumentou para 3,983 milhões de toneladas, sendo configurado como o 4º maior produtor mundial (ABPA, 2020).

Desta forma, considerando a importância desta atividade econômica, em consonância com a aplicabilidade da modelagem matemática, o objetivo do presente trabalho, é estimar o ganho de peso de suínos através do modelo de Montroll e do modelo de Chapman-Richards e determinar qual deles melhor representa o ganho de peso dos suínos.

2 Material e Métodos

A seguir será realizada uma revisão bibliográfica dos modelos de Montroll e Chapman-Richards.

2.1 Modelo de Montroll

Elliott Waters Montroll, nascido em 04 de maio de 1916 em Pittsburgh, Pensilvânia, EUA, possui formação em Química/Matemática. Em 1971 desenvolveu uma generalização do modelo de Verhulst. Montroll considerou que o P_∞ seria o valor máximo de uma população, λ como sendo a taxa de crescimento e α indica o ponto de inflexão da curva (PINHEIRO, 2021, p. 12).

A diferença maior entre os modelos de Montroll e Verhulst é que, para Montroll, o índice de crescimento relativo da população não é linear. Isso possibilita adaptar o modelo a problemas de naturezas diversas.

Seja $P(t)$ o número de indivíduos de uma população no instante t, sua equação diferencial é dada por

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P\left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{\alpha}\right], \lambda > 0 \; e \; \alpha > 0 \tag{2.1}$$

Para determinar α que indica a posição do ponto de inflexão da curva, basta considerar a derivada segunda da expressão igual a zero. Desta forma teremos o seguinte

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \lambda\frac{dP}{dt}\left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{\alpha} - \alpha\left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{\alpha}\right] \tag{2.2}$$

$$0 = \lambda\frac{dP}{dt}\left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{\alpha} - \alpha\left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{\alpha}\right] \tag{2.3}$$

Como λ e $\frac{dP}{dt}$ são diferentes de zero, tem-se

$$\left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{\alpha} - \alpha\left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{\alpha}\right] = 0 \tag{2.4}$$

$$P_m = P_\infty\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{2.5}$$

Com P_m sendo o ponto de inflexão da curva ajustada.

A solução geral do Modelo de Montroll é dada pela seguinte expressão

$$P(t) = \frac{P_0 . P_\infty}{[P_0^{\alpha} + (P_\infty^{\alpha} - P_0^{\alpha}). e^{-\alpha t}]^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{2.6}$$

2.2 Modelo de Chapman Richards

Douglas George Chapman (1920-1996) foi um matemático estatístico dos Estados Unidos, formado na Universidade de Califórnia em 1949. Parte de sua vida foi destinada ao estudo do crescimento dos peixes, tanto é que publicou um capítulo de livro intitulado “Statistical problems in dynamics of exploited fishering populations”, publicado em 1961.

Já Francis Johan Richards (1901-1965) foi um fisiologista vegetal inglês, formado na Universidade de Birmingham, se especializou em estudos quantitativos sobre as necessidades de nutrição mineral das culturas visando seu melhor crescimento e produtividade. Ele publicou uma generalização da forma geral da função logística em 1959.

> O desenvolvimento de novos modelos de crescimento e sobrevivência/mortalidade tem tido avanços consideráveis nas ciências florestais, como o que ocorreu na generalização de Chapman-Richards (Turnbull, 1963) para o modelo de Bertalanffy (1957) e

> trabalhos de Prodan (1968) dando um tratamento compreensivo de várias funções de crescimento e leis de crescimento que já têm sido estudados com referência ao crescimento florestal (BRITO; SILVA; FERREIRA; SANTOS; FERRAS, 2007).

De acordo com Nascimento (2010), citado por Soares (2015), dos modelos mais empregados para estimar a produção por unidade de área estão o de Chapman-Richards (1961), Schumacher (1939) e o de Clutter (1963). Segundo Zeide (1993) citada por Soares (2015), o diferencial do modelo de Chapman Richards é sua flexibilidade, e um dos motivos disso é apresentar um ponto de inflexão com localização proporcional ao máximo valor atingido pela variável que será modelada.

Segundo Brito et al (2007), tanto Chapman como Richards concordavam que a constante alométrica de 2/3 do modelo de Bertalanffy era um tanto quanto limitada, pois esse expoente pode ter diferentes valores dependendo de qual for a natureza da população. A primeira pessoa que aplicou esta equação de crescimento elaborada por Bertalanffy nas ciências florestais, foi Richards.

> A generalização de Chapman-Richards do modelo de crescimento de Bertalanffy é uma expressão matemática de uma hipótese concernente a causas essenciais do fenômeno de crescimento, de tal modo que os parâmetros no modelo têm pelo menos uma total interpretação biológica ou fisiológica (TURNBULL, 1936; PIENAAR; TURNBULL, 1973 apud BRITO; SILVA; FERREIRA; SANTOS; FERRAZ, 2007).

Muito usado para pesquisas florestais, nomeou-se como modelo de crescimento de Chapman-Richards, o seguinte modelo:

$$\frac{dY}{dt} = a.Y^{m} - b.Y \Rightarrow Y = A.\{1 - \beta.EXP[-k.(t - t_{o})]\}^{\frac{1}{1-m}} \quad (2.7)$$

Quando $t_o = 0$, temos:

$$Y = A.\{1 - \beta.EXP[-k.t]\}^{\frac{1}{1-m}} \quad (2.8)$$

Onde A é um valor assintótico (máximo tamanho que o organismo pode atingir).

Conforme o valor de m varia, o modelo acaba por representar algumas leis de crescimento, ou seja, alguns casos particulares do modelo de Chapman-Richards, como por exemplo:

- Se m= ⅔: Modelo de Bertalanffy
- Se m=0: Função de crescimento Monomolecular
- Se m=1: Função de crescimento Gompertz
- Se m=2: Função de crescimento Logístico

Segundo Brito et al (2007), "Clutter e Jones (1980) desenvolveram um procedimento em que o valor assintótico A, que é constante no modelo, pode ser eliminado e substituído por um valor que corresponde a um determinado valor de Y no tempo i."

Considerando um tempo inicial i, e K estando relacionado a taxa de crescimento, usamos o método das diferenças algébricas e obtém-se:

$$\mathrm{Y_i} = \mathrm{A}.\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{k.t}_i}\right)^{\frac{1}{1-\mathrm{m}}} \tag{2.9}$$

Agora, com um tempo final f, temos o seguinte modelo:

$$\mathrm{Y_f} = \mathrm{A}.\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{k.t}_f}\right)^{\frac{1}{1-\mathrm{m}}} \tag{2.10}$$

Porém, como A é uma constante considerando os tempos i e f, é possível conhecer os seus valores, como por exemplo, se considerar o tempo i:

$$A = \mathrm{Y_i}.\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{k.t}_i}\right)^{\frac{1}{1-\mathrm{m}}} \tag{2.11}$$

Substituindo (2.10) na (2.9), teremos:

$$Y_f = \mathrm{Y_i}.\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{k.t}_i}\right)^{\frac{1}{1-\mathrm{m}}}.\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{k.t}_i}\right)^{\frac{1}{1-\mathrm{m}}} = Y_i.\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{k.t}_f}}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{k.t}_i}}\right)^{\frac{1}{1-\mathrm{m}}} \tag{2.12}$$

Como A pode apresentar valores que fogem da realidade, ele é eliminado e dá lugar a um valor real Yi.

3 Resultados e Discussão

Os dados selecionados referentes ao peso dos suínos se encontram na Tabela 1, abaixo.

Tabela 1 – Peso dos suínos no decorrer do tempo

Tempo (semanas)	Peso (Kg)
1	1,4
2	2,8
3	4,4
4	6,4
5	8,4
6	11

7	14,1
8	17,6
9	21,6
10	26
11	30,7
12	35,7
13	41,1
14	46,8
15	52,8
16	59,1
17	65,7
18	72,5
19	79,6
20	86,8
21	94,1

Fonte: S.O.S. Suínos

Utilizamos a ferramenta Excel para plotar o gráfico de dispersão destes dados e adicionamos uma linha de tendência que mais se adaptava, encontrando os resultados conforme Figura 1:

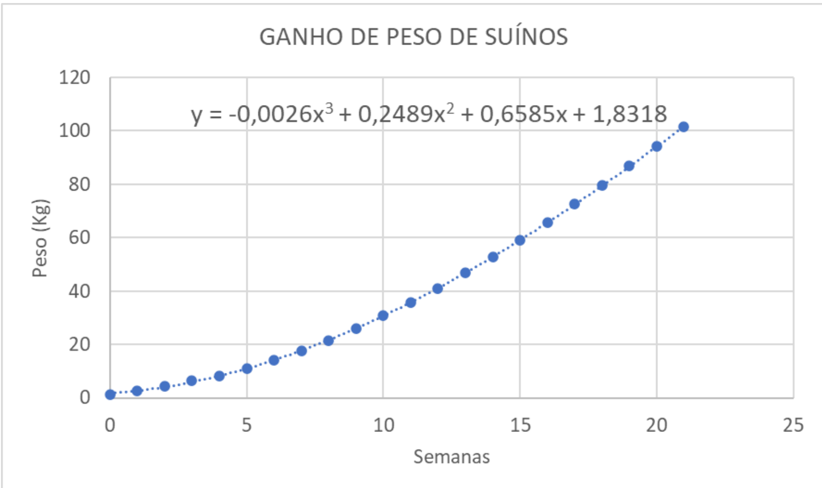


Figura 1 – Gráfico de dispersão e linha de tendência dos dados reais.
Fonte: Autores, 2023

A partir desses dados foi possível realizar a aplicação dos modelos.

3.1 Aplicação do Modelo de Montroll

Primeiramente definiu-se $P_\infty = 150$, pois para porcos de granja, não convém que o peso ultrapasse os 150 Kg, pois são o peso de venda dos mesmos. O peso inicial também já é conhecido, temos $P_0 = 1{,}4$ (Tabela 1).

O próximo passo é encontrar o ponto de inflexão da curva ajustada, para isso calculamos quando a segunda derivada se iguala a zero. Ou seja, dada:

$$f(x) = -0{,}0026\,x^3 + 0{,}2489\,x^2 + 0{,}8565\,x + 1{,}8318 \tag{3.1}$$

$$f''(x) = -0{,}0156\,x + 0{,}5132 \tag{3.2}$$

$$f''(x) = 0 \text{ quando } x = 32{,}89$$

Logo, o ponto de inflexão (P_m) da curva ajustada se dá em $x = 32{,}89$. Com isso conseguimos calcular o alfa fazendo:

$$32{,}89 = 150\,.\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{3.3}$$

Que resulta em $\alpha = -0{,}5938$, vamos trabalhar com o valor absoluto, ou seja, $\alpha = 0{,}5938$.

Agora aplicando os valores encontrados no modelo teremos:

$$P(t) = \frac{P_0 . P_\infty}{[P_0^\alpha + (P_\infty^\alpha - P_0^\alpha).e^{-\alpha t}]^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{3.4}$$

$$P(t) = \frac{1{,}4.150}{[1{,}2^{0{,}5938} + (150^{0{,}5938} - 1{,}2^{0{,}5938}).e^{-0{,}5938t}]^{\frac{1}{0{,}5938}}} \tag{3.5}$$

Ao aplicar esta equação encontramos os seguintes valores, indicados na tabela 2:

Tabela 2 – Pesos resultantes do modelo Montroll

Tempo (semanas)	Peso (Kg)
1	1,4
2	3,502426182
3	8,271454879
4	17,897222
5	34,35593262
6	57,19525827
7	82,44680456
8	105,0353442
9	122,0730314
10	133,4554146
11	140,4845996
12	144,6228064
13	146,9919549
14	148,3268849

15	149,0723678
16	149,4866048
17	149,7161436
18	149,8431415
19	149,9133465
20	149,9521379
21	149,9735664

Fonte: Autores, 2023

Comparando o peso real com o estimado pelo modelo obtemos a seguinte representação gráfica, conforme figura 2:

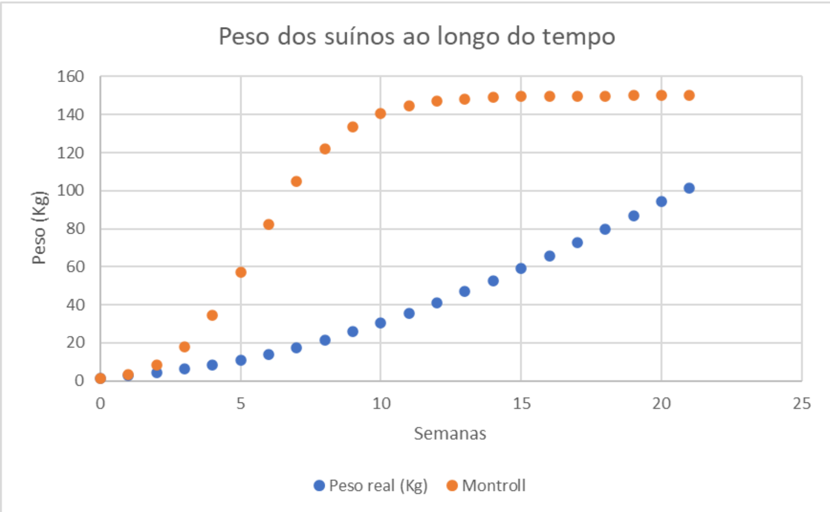


Figura 2 – Comparação do peso real com o peso estimado por Montroll
Fonte: Autores, 2023

3.2 Aplicação do Modelo de Chapman-Richards

Para esta aplicação, podemos identificar as seguintes variáveis:

- A= Valor assintótico, ou seja, o peso máximo atingido pelos suínos;
- c= Peso inicial dos suínos;
- k= Taxa de crescimento relativa dos suínos;
- $\frac{1}{1-m}$= Posição do ponto de inflexão da curva.

O valor de A na aplicação é definido pelo valor máximo que um suíno pode ter, isto é, até que valor o suíno pode engordar, e, portanto, assumir na nossa função. Na prática, esse valor seria algo em torno de 300 kg, que é um valor máximo aproximado que um suíno consegue atingir. Porém, estamos pensando em suínos comerciais, onde se busca o melhor custo benefício entre tempo e custo de engorda, e o valor que pode ser considerado ideal para venda de um suíno é 150 kg. Portanto, na equação, assumimos que A terá valor de 150, assim como no modelo anterior.

Como o valor de c representa o valor inicial que os dados forneciam, então no nosso modelo c vale 1,4.

Para encontrar a taxa de crescimento relativo e, portanto, o valor de k, precisamos realizar a diferença da semana n para semana n+1, e após encontradas as diferenças, somar todas e dividir pelo número de semanas. Dessa forma encontramos o valor de k igual a 4,766.

Não precisamos encontrar o valor de m, mas sim o valor de $\frac{1}{1-m}$, que é o ponto de inflexão do nosso gráfico. Para encontrar o ponto de inflexão, precisamos encontrar a derivada segunda da equação. Fazendo isso, encontramos o valor de $\frac{1}{1-m} = 32{,}89$.

Ao aplicarmos o modelo os valores encontrados, estão apresentados na Tabela 3, e a comparação do peso real e estimado se encontra na figura 3.

Tabela 3 – Pesos resultantes do modelo de Chapman Richards

Tempo (semanas)	Peso (Kg)
1	101,1385815
2	149,5007623
3	149,9957453
4	149,9999638
5	149,9999997
6	150
7	150
8	150
9	150
10	150
11	150
12	150
13	150
14	150
15	150
16	150
17	150
18	150
19	150
20	150
21	150

Fonte: Autores, 2023

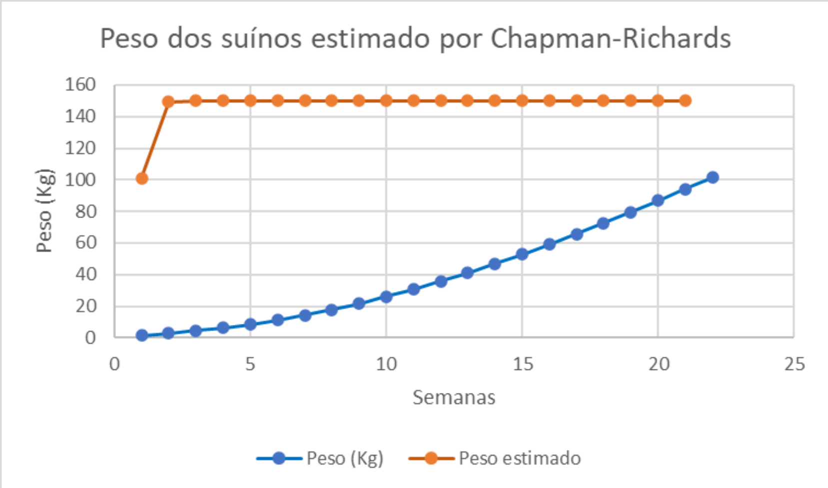


Figura 3 – Comparação do peso real com o peso estimado por Chapman Richards
Fonte: Autores, 2023

A fim de parametrizar melhor o modelo, o peso inicial de um suíno foi determinado por 0 kg. Além disso, alteramos o valor de c para 1, pois considerando o tempo 0, teríamos que o valor inicial seria 0 e, portanto, se anularia a parte da equação que multiplica c, o que invalidaria todo o modelo.

Também foi utilizada a ferramenta solver, que é um suplemento do Microsoft que usa o teste de hipóteses para encontrar um valor ideal (máximo ou mínimo) para uma fórmula em uma célula, conforme restrições, ou limites sobre os valores de outras células de fórmula em uma planilha. O solver trabalha com um grupo de células, chamadas variáveis de decisão ou simplesmente de células variáveis, usadas no cálculo das fórmulas nas células de objetivo e de restrição.

Para aplicação do solver, usamos a soma dos quadrados dos desvios (SQD) como valor a ser alterado para o mínimo possível. Como esse valor depende dos pesos estimados, que dependem dos nossos parâmetros, selecionamos os parâmetros A, k e $\frac{1}{1-m}$ para serem alterados de forma a buscar o menor valor possível de SQD.

O solver quando aplicado na função consegue valores muito melhores para os parâmetros obtidos anteriormente, fazendo com que a função se aproxime muito mais dos dados da realidade. Neste caso o solver encontrou para $A = 101054{,}4$, $k = 0{,}000837323$ e $\frac{1}{1-m} = 1{,}7241899$.

Com esse dado adicionado artificialmente, colocando os parâmetros na fórmula e aplicando o solver obtemos os seguintes resultados, representados na tabela 4 e figura 4.

Tabela 4 – Pesos resultantes do modelo de Chapman Richards com a aplicação do Solver

Tempo (semanas)	Peso (Kg)
0	0
1	0,499718145
2	1,649850411
3	3,317003687
4	5,443155232
5	7,991507052
6	10,93550735
7	14,25458913
8	17,93207991
9	21,95402751
10	26,30847817
11	30,98500281
12	35,9743704
13	41,2683139
14	46,8593571
15	52,74068319
16	58,90603287
17	65,34962373
18	72,0660856
19	79,0504078
20	86,2978958
21	93,8041349

Fonte: Autores, 2023

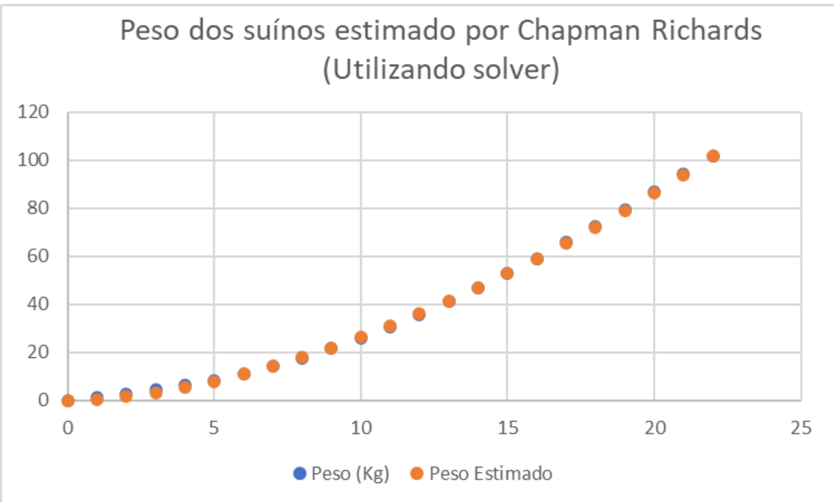


Figura 4 – Comparação do peso real com o peso estimado por Chapman Richards com a utilização do Solver
Fonte: Autores, 2023

Comparando com a soma dos quadrados dos desvios do modelo aplicado sem os dados artificiais da semana 0, conseguimos um valor menor, o que significa que a função ficou mais próxima ainda da realidade.

3.3 Comparação dos modelos

Para comparação entre os modelos foi calculado os erros presentes em ambos os modelos apresentados, para a partir daí ser feita uma comparação entre eles.

Primeiramente, vejamos os erros existentes no modelo de Montroll:

- Erro Absoluto =109,78
- Erro Relativo = 496,79

Agora, observemos os erros presentes no modelo de Chapman-Richards:

- Erro Absoluto = 146,70
- Erro Relativo = 7124,18

Vamos comparar ainda os erros presentes no modelo de Chapman-Richards com a aplicação do solver:

- Erro Absoluto = 1,15
- Erro Relativo = 32,15

Analisando estes erros, podemos concluir que o modelo que melhor se adequou aos dados foi o modelo de Chapman-Richards, utilizando o Solver para encontrar os parâmetros.

4 Considerações Finais

Ao analisar o estudo aqui abordado, é possível constatar que a Modelagem Matemática é uma ferramenta com potencial para resolução de problemas variados. Não somente como possibilidade de resolução, ela também nos auxilia a descrever situações.

Desta forma, ao aplicar os modelos de crescimento no ganho de peso de suínos para o estudo em questão, apresenta-se a oportunidade de comparação da proximidade dos dados modelados com os reais, visto que isso poderia estar auxiliando produtores, servindo como base para tomada de decisões.

Podemos perceber que o Modelo de Montroll tem um crescimento muito acelerado no início e depois se estabiliza. Maior ainda é o crescimento inicial para Chapman-Richards se considerado os dados calculados pela definição de cada variável. Porém, com o auxílio da ferramenta solver conseguimos chegar a um modelo que aproxima muito bem os dados modelados dos reais.

REFERÊNCIAS

BRITO, Cícero Carlos Ramos *et al.* **Modelos de crescimento resultantes da combinação e variações dos modelos de Chapman-Richards e Silva-Bailey aplicados em Leucaena leucocephala (Lam.) de Wit.** Ciência Florestal, vol. 17, núm. 2, abril-junho, 2007, pp. 175-185 Universidade Federal de Santa Maria Santa Maria, Brasil. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/534/53417211.pdf. Acesso em 01 de nov. de 2022.

CHAPMAN, D. E. Statistical problems in dynamics of exploited fishering populations. In: **BERKELEY SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL STATISTIC AND PROBABILITY, 4.,** 1961. Procededings… Berkeley : University of California Press, 1961. p.153-158

GANG, Zhao & LI, Fengri. (2003). **The generalized Chapman-Richards function and applications to tree and stand growth.** Journal of Forestry Research. 14. 19-26.

MAGALHÃES, Maycon Luiz A.; LEITE, Neila M. Gualberto. **Equações Diferenciais Aplicada Dinâmica Populacional,** In: Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, CMAC Nordeste, IFNMG-Campus Januária. 2012.

PINHEIRO, A. N. C. F., **Modelos de Crescimento Populacional – Teoria e aplicação a dados demográficos de São Tomé e Príncipe.** Lisboa, 2021. Disponível em https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/53694/1/TM_Aunaty_Pinheiro.pdf. Acesso em 30 de mar. de 2023.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico:** métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. Novo Hamburgo, RS: Feevale, 2013.

SEBRAE. **Minha empresa sustentável:** Suinocultura. Cuiabá, 2016.

S.O.S. Suínos. **Suinocultura.** Informativo técnico 40. Disponível em https://www.sossuinos.com.br/Tecnicos/info40.htm. Acesso em 30 de mar. de 2023.

VIDALETTI, V. F. **Modelagem Matemática aplicada ao crescimento populacional e de uma atividade econômica (suinocultura) da cidade de Tupãssi/PR.** Toledo, 2019.

X Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
O Ensino da Matemática e as mudanças curriculares na Educação Básica

Toledo, 02 a 05 de maio de 2023.

AS DIFICULDADES DE ENSINAR AS OPERAÇÕES MATEMÁTICAS NO CONJUNTO DOS RACIONAIS PARA ALÉM DO ALGORITMO

Heloisa Cristina da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
heloisasilva@utfpr.edu.br

Amanda Juliane Alves
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
amandajualves@gmail.com

Resumo

O objetivo deste trabalho é relatar a experiência da regência em sala de aula da disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica 2, do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – Campus Toledo. A regência foi desenvolvida por três alunas no Curso de Licenciatura em Matemática, sendo a segunda autora deste trabalho, uma das estagiárias. Destacaremos todo o processo de elaboração das atividades das aulas, do material utilizado como suporte aos alunos, as percepções e dificuldades relativas ao ensino do conteúdo do conjunto dos números racionais em dois sextos anos do Ensino Fundamental. Nas análises das atividades desenvolvidas, juntamente com alguns trabalhos relacionados ao assunto, apontamos algumas sugestões de aprimoramento das aulas planejadas inicialmente, como por exemplo, o uso do ábaco de pinos para explorar de forma mais adequada as operações de adição e subtração e, desenvolver as frações juntamente com o conteúdo dos decimais, para que o aluno possa representar o conjunto dos números racionais com menos dificuldades.

Palavras-chave: Números decimais. Estágio Supervisionado na Educação Básica. Operações matemáticas.

1 Introdução

O presente trabalho tem como objetivo relatar a experiência da regência realizada dentro da disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica 2. As regências foram feitas na disciplina de Matemática, nos anos finais do Ensino Fundamental, em um Colégio Estadual do município de Toledo-PR, com as turmas do 6º ano C e D, com supervisão da professora regente da turma. O conteúdo trabalhado nessas turmas foi definido pela professora regente, de acordo com o currículo a ser cumprido. Assim, a regência teve como tema o conjunto dos números racionais, sendo abordado os assuntos: uso do material dourado na representação dos números decimais, quadro de ordem, leitura e escrita, transformações e comparações, identificação na reta numérica e as operações.

O relato de experiência aqui expresso aborda a regência ocorrida no colégio, expondo as dificuldades percebidas pelas estagiárias em ensinar, ultrapassando o algoritmo, as quatro operações matemáticas no conjunto dos números racionais. Durante as regências a ênfase foi dada ao método e não à compreensão matemática das quatro operações dentro do conjunto dos números racionais.

Na sequência serão apresentadas as atividades desenvolvidas com os alunos, com foco nas dificuldades que esse conteúdo traz para sala de aula, tanto da perspectiva do aluno quanto do professor. Em seguida será feita uma breve descrição da experiência do estágio, tanto da observação quanto da regência, destacando o planejamento das aulas. Na seção 4 será discutido como de fato ocorreu a regência, mostrando as diferenças entre aquilo que foi planejado e o que foi executado, as dificuldades vivenciadas pela estagiária em relação ao conteúdo e como a falta de experiência levou a lacunas ao apresentar as operações matemáticas. A última seção discorrerá sobre as contribuições do desenvolvimento das atividades para a formação pessoal e profissional da estagiária.

2 A elaboração das atividades desenvolvidas

Na busca por uma metodologia diferente para se iniciar o conteúdo de números decimais, decidiu-se por aplicar uma atividade que estivesse integrada com o cotidiano do aluno. Isso possibilitou que os alunos trabalhassem a matemática sem as amarras da formalidade e da mecanização dos cálculos.

Assim, nesse primeiro momento buscou-se fugir do método tradicional de dar aulas, ou seja, em que professores se centram em teorias e exercícios, o que normalmente não gera grande entusiasmo ou aprendizagem nos alunos (KARSBURG, 2017). A atividade do Mercadinho, que será explicada com mais detalhes na próxima seção, serviu como base para o desenvolvimento das demais aulas, sempre sendo feita a retomada da atividade para explorar novos contextos.

Além dessa atividade, o material dourado foi levado para a sala de aula, com o objetivo de mostrar para os alunos outro modo de representar os números racionais. De acordo com Ribeiro (2011, p. 416), a utilização do material dourado é significativo, pois

> [...] permite que uma mesma peça possa representar diferentes quantidades, bastando para tal variar a unidade considerada, o que pode contribuir também para que os alunos deixem de encarar a matemática como algo estático (que lhes é apresentado na forma final), mas passem a encará-la como algo em construção e para o qual eles podem contribuir (ao seu nível, obviamente).

Contudo, ele foi pouco explorado, pois não havia tempo suficiente de aula para permitir que os alunos manipulassem as peças. Somado a isso, a inexperiência das estagiárias não possibilitou que se discutisse com a turma outras possibilidades de representação além da tradicionalmente feita com o cubo grande representando a unidade, a placa os décimos, a barra os centésimos e o cubo pequeno os milésimos.

Além disso, a busca por uma metodologia diferenciada, evitando o modelo tradicional de teoria e exercício, visada na primeira aula foi se perdendo ao longo da regência. Embora a contextualização dos exercícios com a realidade dos alunos se mantivesse, aos poucos as aulas se tornaram mais tradicionais, tendo como base a apresentação de conceitos e definições, seguida pela resolução de exercícios.

3 Descrição da Experiência

O período de realização de estágio no colégio ocorreu por meio de observações e de regências em duas turmas do 6º ano. Foram 7 horas-aula de observações e 14 horas-aula de regência, nos meses de outubro e novembro de 2022.

Na sequência daremos um panorama das observações e aprofundaremos a experiência da regência.

a. Regência em sala de aula

Ao elaborar o plano de aula para a regência buscou-se uma abordagem diferente do conteúdo, priorizando uma aula com participação mais ativa dos alunos. Para definição de como seriam apresentados os conceitos, mesmo que a ordem proposta pelos livros não fosse seguida, foram feitas as análises dos livros didáticos Araribá Mais: Matemática e Matemática: compreensão e prática, dos autores Mara Regina Garcia Gay, Willian Raphael Silva e Ênio Silveira, Cláudio Marques, respectivamente.

Para introduzir o conteúdo para os alunos, buscou-se algum contexto que estivesse inserido no cotidiano deles. A atividade realizada na primeira aula foi um Mercadinho, no qual os alunos tinham uma quantidade predeterminada de dinheiro para gastar e produtos com valores diferentes que eles poderiam comprar.

Figura 1 – Atividade do Mercadinho desenvolvida com os alunos.

Fonte: Autoras (2022).

Deste modo, essa aula foi destinada a compras que os alunos fariam no Mercadinho. A segunda aula serviu para explorar as experiências que os alunos tiveram no Mercadinho (Quadro 1).

Quadro 1 – Atividade do Mercadinho.

1. Quanto dinheiro você recebeu para ir ao mercadinho?

2. Anote quais produtos você comprou e qual o valor de cada um:

   PRODUTO 1:______________________________ VALOR: R$__________
   PRODUTO 2:______________________________ VALOR: R$__________
   PRODUTO 3:______________________________ VALOR: R$__________

3. Quanto custou a sua compra ao total?

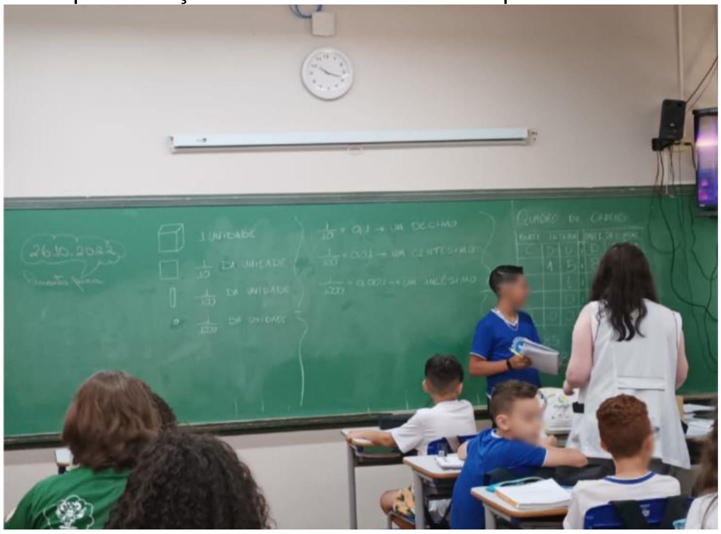
4. Para a sua compra, sobrou dinheiro ou faltou dinheiro? Mostre os cálculos:

Fonte: Autoras (2022).

Era esperado que os alunos tivessem realizado essas contas mentalmente enquanto faziam as compras. Após isso, foram propostas outras situações de compras para que a turma resolvesse.

A terceira aula foi o momento de formalizar os conceitos de soma e subtração, além de explicar alguns erros comuns ao realizar essas operações, como não colocar vírgula embaixo de vírgula. Na aula quatro foi utilizado o material dourado para demonstrar para os alunos as nomenclaturas usadas com os números decimais. Assim, mostrou-se o cubo grande como sendo a representação de uma unidade, a placa como um décimo do cubo grande, a barra como um centésimo do cubo grande e o cubo pequeno como um milésimo do cubo grande. Na sequência foi apresentado o quadro de ordem do sistema decimal, para que os alunos verificassem como os valores dos produtos que eles compraram se encaixariam no quadro, determinando quais algarismos representavam o décimo, o centésimo e o milésimo.

Figura 2 – Apresentação do material dourado e quadro de ordem.



Fonte: Autoras (2022).

Nesta aula também foi ensinada a leitura e escrita dos números decimais. Os alunos foram estimulados a falar como era a leitura dos preços dos produtos do Mercadinho em reais. Assim, eles responderam que o valor de R$4,10, por exemplo, era lido como quatro reais e dez centavos, e R$0,75 lido como setenta e cinco centavos. Em seguida, foi solicitado a leitura daquele número se não representasse dinheiro, da maneira informal que se fala no dia a dia. Neste momento, eles liam os números antes da vírgula e depois da vírgula, como por exemplo, quatro vírgula dez e zero vírgula setenta e cinco. Por último, com base no quadro de ordem os alunos puderam responder como os números decimais são lidos e escritos na forma matemática.

Na quinta aula foi retomada a atividade do Mercadinho, mas agora o objetivo era a comparação de preços dos produtos que haviam escolhido para descobrir qual era o maior e menor valor. Abstraiu-se para valores aleatórios, sendo colocados na reta numérica para que os alunos também pudessem verificar que quando mais longe do zero maior é o número. Também se trabalharam as transformações dos números decimais em frações e vice-versa, buscando sempre relembrar os alunos do décimo, centésimo e milésimo.

A sexta, e última, aula, foi destinada para a explicação da multiplicação. Os alunos receberam uma folha com a definição da multiplicação de números decimais. Eles foram questionados sobre como fariam os cálculos se tivessem comprado mais de uma quantidade do mesmo produto. Após alguns falarem algum produto que comprou no Mercadinho, foram feitas as contas no quadro duplicando ou triplicando o valor do produto. Seguindo o contexto do Mercadinho e do cotidiano das crianças, a próxima atividade aplicada foi sobre o açougue, sendo entregue para cada aluno um panfleto com as promoções da carne.

Figura 3 – Panfleto da atividade do açougue.

Fonte: Autoras (2022).

Foram aplicadas duas questões nas quais os alunos deveriam calcular o preço da carne conforme a quantidade de quilos a se comprar. A regência foi finalizada com a correção dos exercícios da lista entregue para os alunos.

4 Análises e Reflexões

Ao planejar a regência com a proposta do Mercadinho, deixou-se uma aula inteira para que os alunos pudessem observar os produtos e fazer os cálculos mentais do que eles poderiam comprar com o dinheiro que receberam. Todavia, o desenvolver da atividade levou as estagiárias a buscar outros encaminhamentos para completar o horário da aula. Isso ocorreu pois na turma do 6º ano C os alunos não escolheram os produtos considerando o produto em si, mas observando somente o preço. Logo, houve aqueles que escolheram somente os produtos mais baratos para não correrem o risco de faltar dinheiro. Em contrapartida, como os produtos eram limitados, teve aqueles alunos que ultrapassaram o valor fornecido, pois não havia produtos com preços baixos que pudessem escolher.

Na aplicação da atividade na turma do 6º ano D foi necessário encontrar outra estratégia para que os alunos não seguissem o mesmo caminho da turma anterior. Assim, optou-se por determinar que os alunos deveriam gastar pelo menos 50% do valor recebido.

Ao impor essa regra para as compras, pode-se observar que o 6º D demorou mais tempo para concluir a atividade, o que casaria com aquilo que foi planejado inicialmente no plano de aula.

Embora a atividade tenha apresentado algumas falhas por não ter sido previsto que os alunos tomariam o caminho mais fácil para realizar as compras, foi possível perceber que ambas as turmas não tiveram grandes dificuldades de concluir a atividade. Esse era justamente o objetivo, pois de acordo com Ribeiro (2011, p. 414).

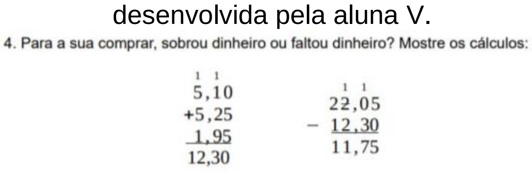
> Os números decimais devem surgir em contexto, devendo, portanto, ser associado a situações do dia a dia. Medir, comparar e ordenar comprimentos, pesos, quantidades e quantias de dinheiro em contextos práticos da vida de todos os dias permite descobrir naturalmente as relações de base entre os números decimais e entre estes e os inteiros.

Ou seja, por ser tratar de uma prática que eles realizam no dia a dia, seria natural para os alunos fazerem os cálculos sem a necessidade de associar o trabalho com os números decimais.

Após o Mercadinho, os alunos preencheram a folha entregue para eles com alguns questionamentos acerca da atividade. Foi possível perceber que muitos não utilizavam o símbolo R$ ao colocar os valores que representavam dinheiro. Ou seja, se receberam R$22,05 para gastar no Mercadinho, ao responderem a questão 1 da atividade escreviam somente 22,05.

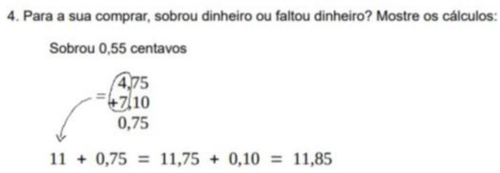
Outra questão que os alunos também apresentaram dificuldades foi realizar a operação de subtração para saber se havia sobrado ou faltado dinheiro. Poucos conseguiram realizar os cálculos de forma satisfatória, e outros sabiam se sobrava ou faltava, mas não conseguiam realizar o cálculo para apresentar o valor.

Figura 4 – Transcrição do Exercício 4 desenvolvida pela aluna V.



Fonte: Autoras (2022).

Figura 5 – Transcrição do Exercício 4 desenvolvida pelo aluno G.



Fonte: Autoras (2022).

A ideia de pedir para os alunos responderem essas questões foi muito produtiva, pois na terceira aula pudemos dar ênfase aos erros cometidos, além de formalizar os conceitos de adição e subtração.

Para dar sentido a regra de adição e subtração (vírgula embaixo de vírgula), utilizou-se primeiramente do material dourado para apresentar para os alunos o que eram décimos, centésimo e milésimos e como identificá-los nos números decimais. A proposta de trabalhar com o material dourado foi inserida no plano de aula, pois se acredita que

> [...] a utilização dos materiais manipulativos apresenta vantagens significativas para o aprendizado do aluno, dentre elas podemos destacar, a criação de um ambiente de aprendizagem favorável: ao despertar do potencial lúdico; a interação estabelecida entre colegas e professor e a motivação para a aprendizagem (CARMO et al, 2013, p. 2).

Contudo, pela falta de tempo para realmente explorar o material, acabou-se por optar em apenas mostrar para os alunos as peças e ir fazendo-os pensar o que a placa, a barra e o cubo pequeno representavam em relação ao cubo grande, e a partir disso ir nomeando os algarismos dos decimais.

Valeu-se também do quadro de ordem para mostrar para os alunos que cada algarismo tinha sua "casa". Ou seja, foi explicado que, assim como nos números naturais, em que há unidade, dezena e centena, ao armar as contas de adição e subtração dos números decimais era necessário que décimos ficassem embaixo de décimos, centésimo embaixo de centésimo e milésimo embaixo de milésimo.

Embora os alunos parecessem compreender os cálculos feitos, e não houvesse questionamentos sobre o porquê de ser desse jeito, em conversa com a orientadora da disciplina de Estágio Supervisionado, percebeu-se que poderia ter sido explorado mais a fundo essa questão. Uma alternativa seria trabalhar outras formas de representação para realizar as operações, como por exemplo, o uso do Ábaco de Pinos relatado pelos autores Carmo et al. (2013).

Os autores justificam que o uso do ábaco é um ótimo recurso de aprendizagem para as operações de adição e subtração, evitando que os alunos usem os termos "vai um" e "pega emprestado". Também é apontado que este recurso possibilita a compreensão do "processo de decomposição dos números decimais, de associação do valor posicional, de leitura em suas diferentes formas e de realização das trocas (CARMO et al, 2013, p. 2).

As estagiárias seguiram a linha do livro didático, que é também como muitos professores planejam suas aulas, e nele não há embasamento suficiente para se explorar outras representações. Essa falta de métodos para realizar essas duas operações pode acarretar uma compreensão rasa pelos alunos de como fazer os cálculos, principalmente na subtração. Entretanto, conforme vivenciado, o tempo de aula as vezes se torna curto para conseguir contemplar todo o currículo.

Com relação à quinta aula, em que foi discutida a comparação e transformação dos números decimais, também houve certa falha ao não retomar as frações para que os alunos fizessem a ponte entre esses dois conteúdos. De acordo com Ribeiro (2011), o ideal seria fazer a abordagem conjunta de frações e decimais, fazendo com que o aluno busque as relações existentes entre elas, além de possibilitar a construção e apropriação dos conceitos de ordem e equivalência entre os conteúdos. Essa falta de ligação entre os conteúdos fez com que os alunos apresentassem mais dificuldade para compreender as transformações dos números decimais para fração e vice-versa.

A última aula do planejamento foi destinada à operação de multiplicação. Novamente se utilizou do cotidiano dos alunos para introduzir o assunto, mostrando para eles onde é possível encontrar a multiplicação de números decimais. A atividade principal desenvolvida nessa aula foi a do Açougue, na qual os alunos tinham o panfleto com as ofertas e deveriam responder a questões em que era fornecido o peso em quilos de carne a ser comprada e pedia qual seria o preço a pagar.

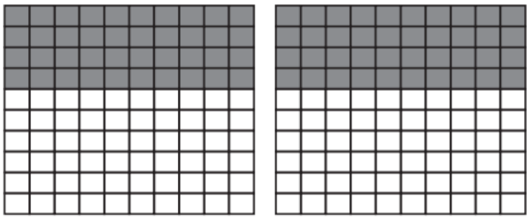
Assim como no Mercadinho, os alunos se mostraram entusiasmados em participar da aula e responder a questão. Entretanto, alguns apresentavam dificuldades em entender em que posição colocar a vírgula após a conta de multiplicação ser realizada. A técnica utilizada para sanar essas dúvidas foi dizer que após a multiplicação com números decimais, é preciso fazer a contagem das casas após a vírgula dos números multiplicados e contado da direita para a esquerda as posições para inserir a vírgula.

Os alunos aceitaram essa explicação e continuaram os cálculos obedecendo essa regra. Logo, houve a falta de questionamentos por parte dos alunos para entender porque de fato isso ocorre, e também de apropriação do conteúdo por parte das estagiárias para instigar os alunos a pensarem dessa forma. Assim, as dificuldades dos professores em ensinar a multiplicação dos números decimais vem de suas próprias limitações, pois

> [...] apesar de saberem-no para si próprios (na óptica do utilizador – conhecimento comum do conteúdo), não possuem um conhecimento de e sobre a matemática que lhes permita conhecer um conjunto distinto de propriedades relativas aos conteúdos específicos que pretendem ensinar, assim como formas distintas de fazê-lo – conhecimento especializado do conteúdo (RIBEIRO, 2011, p. 418).

Essas dificuldades poderiam ser amenizadas se utilizadas outras representações para fazer os cálculos, como o sugerido por Ribeiro (2011), que traz a utilização do material dourado. O autor apresenta em seu artigo as quatro possibilidades da multiplicação com números decimais, “(a) multiplicação de um número decimal por um inteiro; (b) multiplicação de um número decimal por um decimal superior à unidade; e (c) multiplicação de dois números decimais inferiores à unidade” (RIBEIRO, 2011, p. 418). Escolhendo como exemplo a multiplicação de um número decimal por um inteiro, para realizar a operação 0,4x2 o autor se utiliza das placas, que podem ser divididas em dez barras.

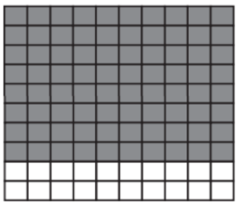
Figura 6 – Utilização do material dourado para resolução da operação 0,4x2.



Fonte: Ribeiro (2011, p. 418).

Com isso, o aluno pode perceber que quatro barras representam quatro décimos da placa, como se quer duas vezes esse valor, tem-se duas placas com quatro barras selecionadas. Ao transpor as barras para uma única placa, é fácil perceber que agora há oito barras selecionadas, resultando em oito décimos, resposta para a operação.

Figura 7 – Resultado da operação 0,4x2.



Fonte: Ribeiro (2011, p. 418).

Assim, o grande inimigo ao se ensinar operações matemáticas com números decimais é o professor não buscar conhecer, e não trazer para a sua aula, representações e métodos diferentes que estimulem os alunos a pensarem. É essencial que

> [...] os alunos adquiram uma competência matemática que lhes permita uma plena e clara compreensão do sistema de numeração de posição e do modo como este se relaciona com os algoritmos das quatro operações, é

> essencial que eles sejam confrontados com situações envolvendo diversas representações, devendo o professor ter em atenção não apenas a escolha dessas representações – e dos exemplos utilizados (ROWLAND, 2008, apud RIBEIRO, 2011, p. 411).

5 Considerações Finais

Mesmo tendo enfrentado adversidades no ensino do conteúdo, toda experiência é sempre válida. Essa foi a primeira vez que se entrou em sala de aula tendo o compromisso de assumir a turma e ministrar aulas, na disciplina de estágio anterior foram realizadas somente observações.

Ao saber do conteúdo que deveria ser ministrado, já havia momentos de tensão por medo de ser um assunto difícil de ser trabalhado. Esse medo foi agravado pelo fato dos alunos estarem voltando de dois anos de ensino remoto, ou seja, era esperado uma grande defasagem na aprendizagem. Entretanto, mesmo com as dificuldades aqui apresentadas, foi possível trabalhar grande parte do conteúdo proposto inicialmente pela professora regente, faltando a divisão e potencialização dos números decimais por falta de tempo.

Na maior parte das aulas os alunos colaboraram com as atividades, realizando aquilo que era solicitado. Eles também não tinham vergonha de chamar na carteira pra tirar suas dúvidas ou perguntar como se resolvia determinado exercício. Foi possível perceber que eles estavam animados por terem uma experiência diferente.

Quanto a formação pessoal e profissional, o estágio é o momento em que podemos vivenciar o cotidiano de sala de aula e perceber de maneira mais prática se a docência é o caminho que se deseja seguir ao final do curso de licenciatura em matemática. É nesse momento em que se percebe que aquilo que você ensina pode não atingir a todos, mas aqueles que atinge pode gerar frutos que serão colhidos no futuro.

Referências

CARMO, V. M. do; PEREIRA, M. M.; COELHO, A. G. V. Adição e subtração de números decimais: contribuição do ábaco para a assimilação de conceitos e processos de cálculos. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática–ULBRA, Canoas-RS, 2013. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/search/authors/view?firstName=Anielle%20Gl%C3%B3ria%20Vaz&middleName=&lastName=Coelho&affiliation=&country=>. Acesso em: 31 mar. 2023.

GAY, M. R. G., SILVA, W. R. **Araribá Mais: Matemática**. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2018.

KARSBURG, V. G. O ensino de operações com números decimais no sexto ano do Ensino Fundamental. VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática–ULBRA, Canoas-RS, 2017. Disponível em: http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/schedConf/presentations. Acesso em 31 mar. 2023.

RIBEIRO, C. M. Abordagem aos números decimais e suas operações: a importância de uma eficaz navegação entre representações. Educação e Pesquisa, São Paulo, v.37, n.2, p. 407-422, mai./ago. 2011. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1517-97022011000200013. Acesso em: 31 mar. 2023.

SILVEIRA, E. **Matemática: compreensão e prática.** 5 ed. São Paulo: Moderna, 2018.

X Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
O Ensino da Matemática e as mudanças curriculares na Educação Básica
Toledo, 02 a 05 de maio de 2023.

O DESENVOLVIMENTO DE UM JOGO PEDAGÓGICO: RELATO DE EXPERIÊNCIA NO ÂMBITO DO PIBIC-EM

Amós Cardoso da Silva
Colégio Estadual Jardim Porto Alegre
amosc216@gmail.com

Renato Francisco Merli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
renatomerli@utfpr.edu.br

Phyllipe Lima
Universidade Federal de Itajubá - IMC
phyllipe@unifei.edu.br

Resumo

Atualmente os jogos eletrônicos são uma mídia extremamente popular e estão cada vez mais presentes na vida das pessoas. Dada a versatilidade e interatividade desta mídia, é natural que ela seja utilizada para diversos fins além do entretenimento, por exemplo, como uma proposta para o ensino de matemática. Neste contexto, este trabalho tem o objetivo de relatar a experiência do primeiro autor no desenvolvimento de um jogo digital pedagógico voltado para o ensino de matemática no reconhecimento de figuras geométricas. A fim de alcançar o objetivo, o referencial teórico sobre Game Design e, na sequência, a descrição do desenvolvimento do jogo foram apresentados. Este trabalho permitiu evidenciar as dificuldades em se elaborar um jogo pedagógico a partir de uma *Game Engine*.

Palavras-chave: *Games*. *Unity*. *Game Design*.

1 Introdução

Atualmente os jogos são uma das mídias de entretenimento mais populares do mundo e vem conquistando cada vez mais jogadores, contudo de todas as mídias de entretenimento, essa conta com uma das produções mais complexas e demoradas, tamanha dificuldade se deve por seu alto nível de interatividade e multidisciplinaridade, com o jogador controlando diretamente a maior parte das ações do jogo. Essa característica de controle é um dos pontos de diferença entre jogos e outros meios como filmes, livros e músicas.

A produção de jogos envolve muitas áreas distintas, como o design, o desenvolvimento e a pós-produção. Apesar de ainda complexo, o desenvolvimento de um jogo teve um impulso com a criação de *Game Engines,* ambientes de desenvolvimento que facilitam o processo de criação dos jogos e encurtam a produção, fazendo a integração com motores de física, motores de renderização gráfica, tanto 2D quanto 3D, a programação, dentre outras partes da produção em apenas um lugar. Algumas das *Game Engines* mais populares são a *Unreal Engine*[1], *Godot*[2], *GameMaker Studio*[3] e *Unity.* Tais *engines* trouxeram a possibilidade para que equipes com pequeno ou nenhum orçamento pudessem entrar no mercado de jogos.

Como os jogos possuem alto nível de interatividade e são uma das mais populares formas de entretenimento, mostram um grande potencial para o uso pedagógico, uma vez que podem entreter e ao mesmo tempo estimular o desenvolvimento do pensamento lógico e estratégico. Nesse contexto, uma pergunta pode ser feita: *Como elaborar um jogo para o ensino da matemática no reconhecimento de figuras geométricas?*

Assim, o presente trabalho tem como objetivos: abordar a criação de jogos pedagógicos na *Game Engine Unity*, como jogos eletrônicos podem ser utilizados para o ensino da matemática no reconhecimento de formas geométricas, bem como apresentar o relato de experiência do primeiro autor na produção de um jogo pedagógico.

Os próximos tópicos a serem abordados serão o design de jogos, o caminho da *Unity* até se tornar uma das plataformas de criação de jogos mais populares e como é o seu atual ambiente de desenvolvimento, e o relato de como tem sido a criação de jogos pedagógicos utilizando a *Unity*.

2 *Game Design* e Educação Matemática

O *Game Design* é uma das partes mais fundamentais na criação de jogos, segundo Rogers (2013, p. 38), o papel do *Game Designer* é "[...] criar as ideias e regras que compreendem o jogo", ou seja, o *Game Design* é a parte do desenvolvimento responsável por definir como o jogo será, desde sua concepção até as regras que definem os objetivos do jogo e delimitam a *gameplay*, sendo assim, uma das primeiras e mais fundamentais partes do processo de criação de jogos.

O *Game Design* é uma das áreas mais importantes no desenvolvimento de jogos, uma vez que não apenas dá as ideias base para o jogo mas também pensa em todo seu

[1] *Unreal Engine.* Disponível em: https://www.unrealengine.com/pt-BR/features. Acesso em: 27 mar. 2023.
[2] *Godot*. Disponível em: https://godotengine.org. Acesso em: 27 mar. 2023.
[3] *GameMaker Studio*. Disponível em: https://gamemaker.io/pt-BR. Acesso em: 27 mar. 2023.

conteúdo e coordena o seu desenvolvimento, guiando o jogo ao caminho que foi pensado para ele.

Nesse contexto, sabemos que os jogos, sendo uma mídia extremamente popular e versátil, possuem diversos gêneros, estilos, estéticas e tipos diferentes, sendo a maioria voltada para o puro entretenimento. Alguns jogos são utilizados para fins totalmente artísticos, como o *Dear Esther*[4], e para fins pedagógicos, exigindo assim diferentes desafios de *Game Design*.

Além disso, entendemos que,

> [...] o jogo torna-se importante aliado aos processos de ensino e de aprendizagem pois, ao jogar, o estudante, pelo desejo que tem em ganhar, é incentivado a ficar atento, a corrigir e comparar estratégias apresentando capacidade de abstrações de forma rápida fazendo relações o tempo todo (ELIAS; ZOPPO; KALINKE, 2019, p. 5).

Para os jogos pedagógicos, um dos principais desafios é apresentar de forma orgânica e divertida o conteúdo didático, mantendo o jogador interessado e ao mesmo tempo sendo efetivo no ensino. O fator diversão é um desafio do *Game Design* no geral, uma vez que não existe fórmula para "criar" diversão. Além disso, jogos com fins pedagógicos tem uma dificuldade a mais nesse quesito, uma vez que há o preconceito enraizado de que tais jogos são chatos.

A matemática também é taxada por muitos alunos como sendo uma matéria chata e difícil, utilizar os jogos para ensinar matemática pode ajudar a fomentar o interesse e mesmo facilitar a compreensão destes alunos. Em um jogo, é esperado que os os conteúdos sejam apresentados de uma maneira mais descontraída e divertida (PRENSKY, 2012). Além disso, como aponta Mattar (2011), para promover o aprendizado:

> [...] um jogo precisa ser centrado no jogador, construído, autêntico, distribuído, lúdico e com feedback constante. Ou seja, deve permitir que o jogador tome decisões, a forma com que o jogador irá completar os objetivos deve depender das decisões tomadas, devem ser estimulantes e dinâmicos e o conteúdo deve ser inserido sutilmente na maior parte do jogo (MATTAR, 2010, p.121).

Dessa forma, ao promover o aprendizado concordamos com Teófilo (2002, p. 50) de que "[...] a aprendizagem baseada em jogos digitais tem como norte o processo de

---

[4] *Dear Esther* é um jogo independente de exploração lançado em 2008 como uma modificação gratuita feita através da *Engine Source*, sendo posteriormente redesenhado para um lançamento comercial em 2012 pelo estúdio *The Chinese Room*. Maiores informações podem ser obtidas em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Dear_Esther. Acesso em: 26 mar. 2023.

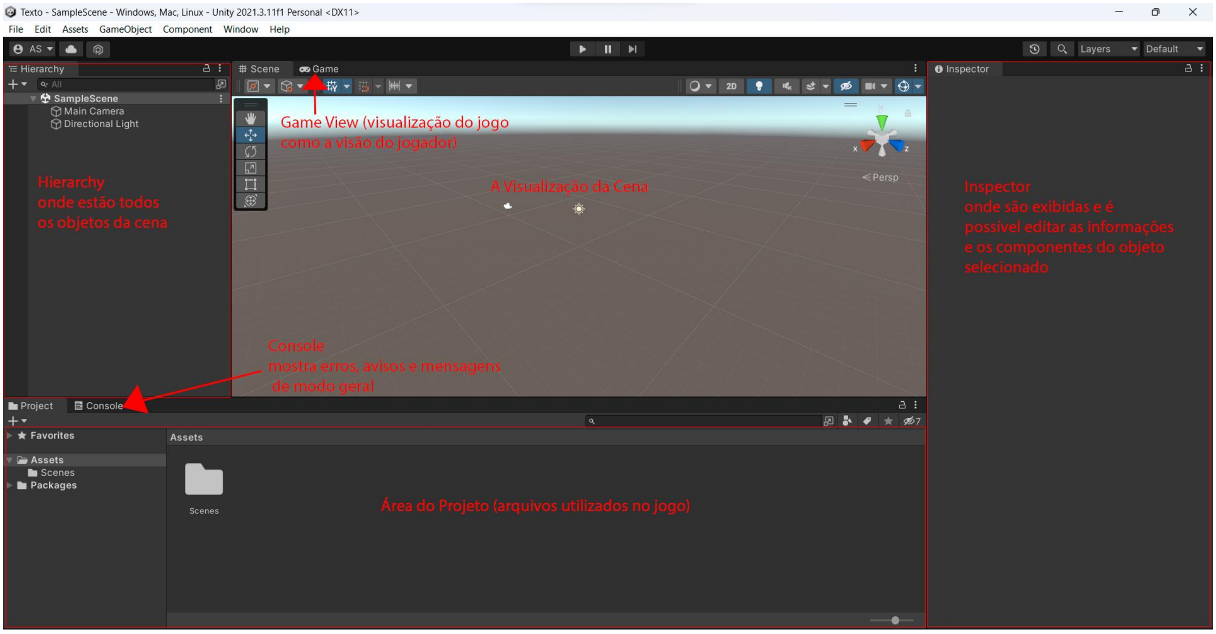
aprendizagem interativo,que deve ser levado em conta para elaboração de jogos que visem o aprendizado de um determinado conteúdo".

Na seção seguinte descrevemos a Engine utilizada para o desenvolvimento do jogo.

3 A *Unity*

Atualmente a *Unity* é uma das principais *Game Engines* do mercado, sendo a mais utilizada por quem está começando no mundo do desenvolvimento de jogos. Dentre os vários fatores que tornam a *Unity* a mais requisitada para iniciantes, podemos citar seu grande potencial no desenvolvimento de jogos 2D e 3D, sua excelente interface com uma ampla gama de ferramentas que auxiliam no desenvolvimento (Figura 1), sua linguagem de programação de simples sintaxe, sendo ela o C#[5], seu ótimo ambiente para iniciantes, contando com diversos cursos e tutoriais gratuitos disponibilizados por sua comunidade e pela própria *Unity Technologies.*

Figura 1 – O Básico da Interface da *Unity*

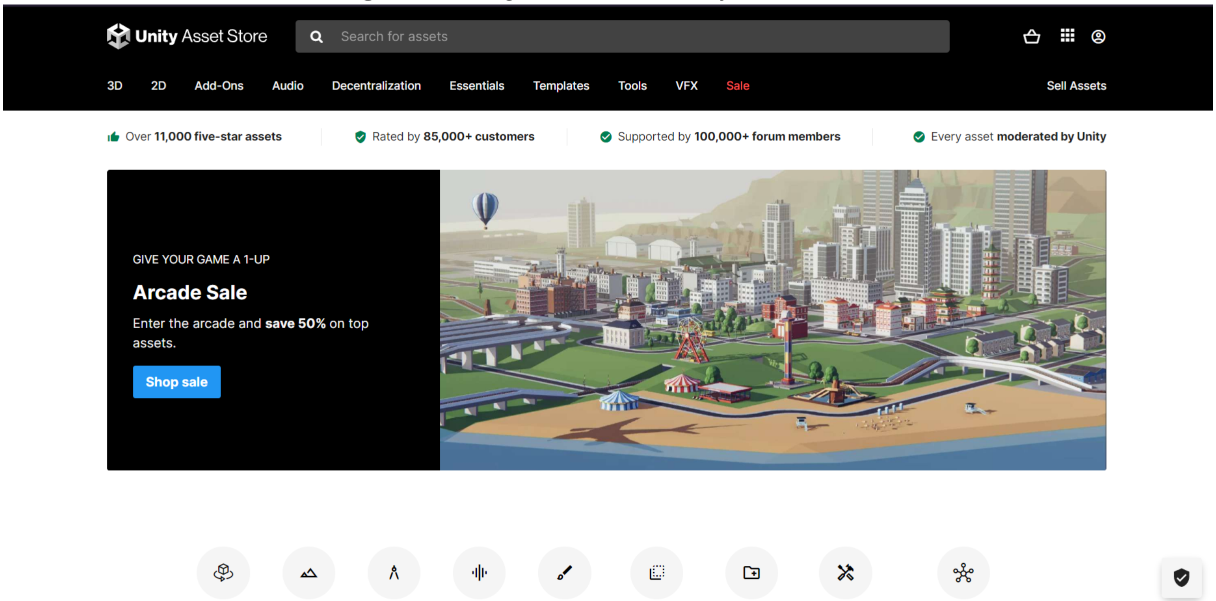


Fonte: *Unity* 2021.3.11f1

[5] C# é uma linguagem de programação orientada a objetos desenvolvida pela Microsoft para a plataforma .NET. Mais informações podem ser obtidas em: https://learn.microsoft.com/pt-br/dotnet/csharp/tour-of-csharp/.

Também há de se frisar a *Unity Asset Store*, um *Marketplace* lançado em 2010 juntamente com a versão 3.0 da *Unity*, na qual é possível não apenas comprar e baixar *Game Assets*[6] para utilizar em seus projetos como também vender os seus próprios assets, sendo assim uma forma de monetizar seus projetos para além do desenvolvimento de jogos completos com a *Unity*.

Figura 2 – Página Inicial da *Unity Asset Store*



Fonte: Site da *Unity*[7]

A *Unity* foi lançada no ano de 2005 pela *Unity Technologies*, inicialmente era exclusivamente para macOS X[8], futuramente a *Engine* recebeu diversas atualizações aumentando sua compatibilidade, como em 2008 quando os *Devs* desenvolveram também para iPhone e em 2009 com o lançamento da *Unity* 2.5 finalmente houve compatibilidade com *Windows.*

Com o tempo, as atualizações foram trazendo novos recursos, mudanças em recursos já existentes e principalmente aumentando sua biblioteca de plataformas compatíveis. Atualmente a *Unity* é compatível com praticamente todas as plataformas

[6] Game Assets nada mais são que elementos que constituem um jogo, como artes, efeitos sonoros e músicas. Mais informações podem ser obtidas em: https://producaodejogos.com/game-assets-que-ajudam-no-desenvolvimento-do-seu-jogo/.
[7] Disponível em: https://assetstore.unity.com.
[8] macOS X foi o sistema de computadores Mac, da Apple Inc. Lançado em 2001. Mais informações podem ser obtidas em: https://www.techtudo.com.br/tudo-sobre/mac-os/.

atuais, desde *Windows* até os consoles da atual geração e mesmo para realidade virtual e aumentada, todos esses fatores já citados pavimentaram o caminho da *Unity* para atingir o atual patamar da *Engine*.

Sendo uma das plataformas mais populares no desenvolvimento de jogos, não só para jogos *indie* como também para jogos de grande orçamento, os chamados AAA ou *triple A.* Segundo a base de dados da *Steam*[9], registrada pelo *SteamDB*[10], a *Unity* é a mais utilizada na plataforma da Valve, representando no presente momento cerca de 62,14% dos jogos publicados na plataforma utilizando a *Engine*. Os números podem variar por conta da mudança nos critérios e métodos de pesquisa, contudo a *Unity* praticamente sempre aparece em primeiro lugar como a *Game Engine* mais escolhida.

Com isso podemos presumir que grandes jogos foram feitos utilizando a *Engine*, uma vez que é tão popular, dentre eles, podemos citar *Cuphead*[11], *Cities Skylines*[12] e *Rust*[13], jogos com propostas completamente diferentes e que obtiveram grande sucesso, mostrando a versatilidade e grande potencial da *Engine*.

[9] *Steam* é uma plataforma de distribuição de jogos digitais para computadores lançada pela *Valve Corporation* em 2002. Mais informações podem ser obtidas em: https://tecnoblog.net/responde/o-que-e-steam-tudo-sobre-a-loja-valve/.
[10] Dados obtidos através da *SteamDB*, site independente de coleta de dados da plataforma *Steam*. Disponível em: https://steamdb.info/tech/. Acesso em 27 mar. 2023.
[11] Cuphead é um jogo de ação e tiros clássico em 2D, inspirado nas animações infantis da década de 1930, lançado em 2017 pelo *Studio MDHR.* Disponível em: https://store.steampowered.com/app/268910/Cuphead/. Acesso em 27 mar. 2023.
[12] Cities Skylines é um simulador de construção de cidades extremamente popular, lançado em 2015 pela *Paradox Interactive* e desenvolvido pela desenvolvedora *Colossal Order.* Disponível em: https://store.steampowered.com/app/255710/Cities_Skylines/. Acesso em: 27 mar. 2023.
[13] Rust é um jogo de ação-aventura e sobrevivência *Online*, desenvolvido e publicado pela *Facepuch Studios* em 2013. Disponível em: https://store.steampowered.com/app/252490/Rust/. Acesso em: 27 mar. 2023.

Figura 3 - Capas dos Três Jogos Citados no Texto

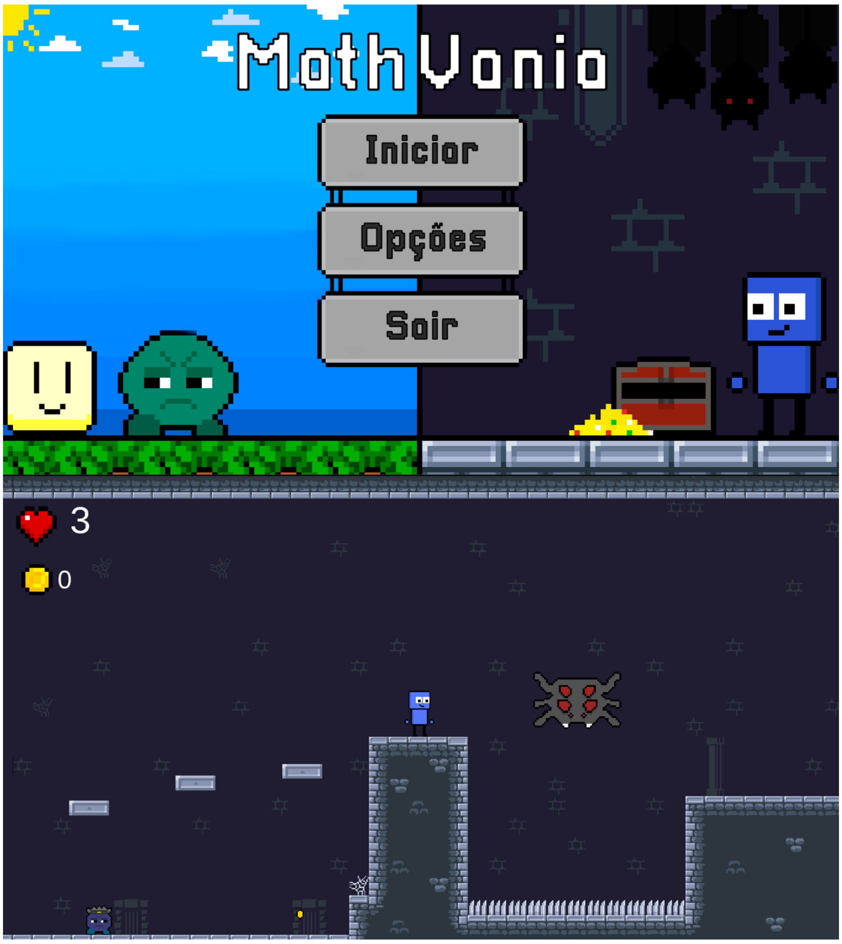
Fonte: Loja da *Steam*

Seu ambiente de desenvolvimento é possivelmente um dos mais completos do mercado, contendo uma interface intuitiva, o que facilita para quem tem seu primeiro contato com a plataforma, e uma ampla gama de recursos poderosos que permitem a criação de grandes jogos como os já citados anteriormente. Mais detalhes sobre o desenvolvimento serão apresentados mais à frente no próximo tópico.

4 O processo de desenvolvimento com *Unity*

O processo aqui descrito, trata-se do desenvolvimento de um jogo chamado *MathVania* (Figura 4). Esse projeto tem sido desenvolvido em *Unity*, dentro do gênero plataforma de aventura. Ainda em fase inicial de desenvolvimento, não há uma primeira fase completamente concluída.

Figura 4 - Tela Inicial do Jogo e *Gameplay*



Fonte: Projeto de jogo *MathVania*

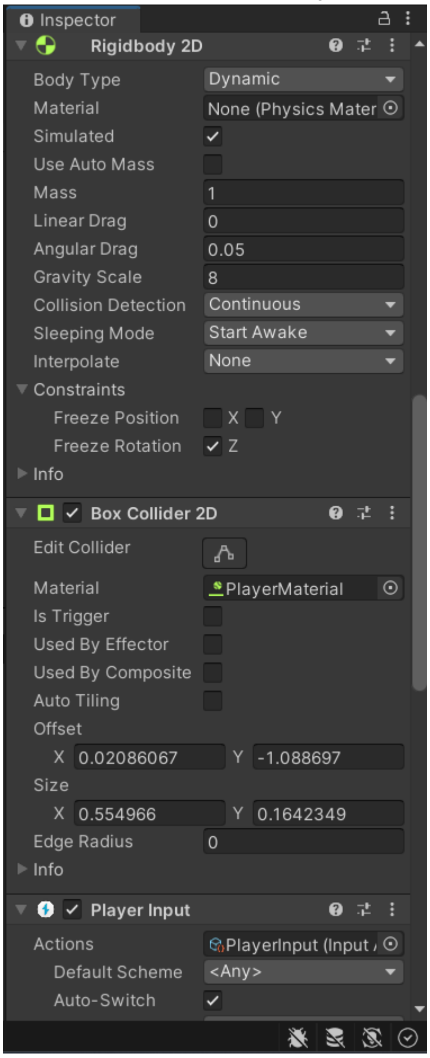
O jogo tem caráter pedagógico, sendo seu conteúdo o reconhecimento de figuras geométricas para o Ensino Fundamental, mais precisamente, a habilidade EF02MA15 da BNCC, ou seja, “Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos” (BRASIL, 2018, p. 283).

Em relação a aquisição do conhecimento necessário para programar em *Unity*, é necessário entender a interface (Figura 1). Após compreendidas as principais partes da interface do programa, é essencial configurar a câmera, realizar o design do cenário com o sistema de *Tilemap*[14] da *Unity* e começar a adicionar *GameObjects*.

14 *Tilemap* é um termo que define basicamente como os tiles, que podem se traduzir para ladrilhos, são organizados no cenário do jogo. Mais informações podem ser obtidas em: https://www.domestika.org/pt/blog/6985-o-que-e-tileset-e-tilemap-no-desenvolvimento-de-games. Acesso em: 30 mar. 2023.

Os *GameObjects* são tudo que compõem a cena do jogo, o objeto do *Player* que será controlado pelo jogador, o objeto de um inimigo, objetos de cenário, dentre diversos outros que podem compor o jogo. Com isso é possível desenvolver os componentes dos objetos, estes que, por sua vez, são responsáveis pelo comportamento dos objetos na cena aos quais estão anexados. Os componentes podem ser de diferentes categorias, como colisores que detectam colisões, o *RigidBody* que nada mais é do que o componente responsável pela física na *Unity*, dentre vários outros componentes (Figura 5).

Figura 5 – Alguns Componentes de um Objeto Mostrados no *Inspector*



Fonte: *Unity* 2021.3.11f1

Ao compreender estas partes da *Unity* é possível começar a codificar o jogo. Os *Scripts*, são uma parte mais complexa do desenvolvimento, exigindo conhecimento relacionado a lógica de programação e a programação em si. A linguagem de programação utilizada pela *Unity*, é o C# (*C sharp*), uma linguagem de simples sintaxe.

Na Figura 6, é apresentado o script de movimento que foi criado no jogo.

Figura 6 – Apresentação do *Script* de Movimentação

```
    1 referência
175 void Flip()
176 {
177     transform.localScale = new Vector2(Mathf.Sign(rig.velocity.x) , transform.localScale.y);
178 }
179
    1 referência
180 void Move()
181 {
182     rig.velocity = new Vector2(playerDir.x * velocidadeX, rig.velocity.y);
183     bool isRunning = Mathf.Abs(rig.velocity.x) > Mathf.Epsilon;
184     anim.SetBool(Literals.PLAYER_WALKING, isRunning);
185     if (isRunning)
186     {
187         Flip();
188     }
189 }
190 #if (UNITY_EDITOR || UNITY_STANDALONE || UNITY_WEBPLAYER)
    0 referências
191 void OnMove(InputValue inputValue)
192 {
193     playerDir = inputValue.Get<Vector2>();
194 }
```

Fonte: *Visual Studio* 2022 Projeto *MathVania*

O Script mostra a base da movimentação, que é fundamental para os jogos, pois ela permite ao jogador interagir com o mundo criado pelo jogo. O método *"OnMove"* da linha 191 é responsável por armazenar o valor do botão apertado pelo jogador, já o método *"Move"* é responsável por transformar esse valor em velocidade de movimento no eixo X, bem como ativar o método *"Flip",* da linha 175, ao valor do botão pressionado ser equivalente à -1, ou seja, equivalente à esquerda.

Este é apenas um dos *Scripts* presentes no projeto do jogo *MathVania*.

5 Conclusões

Diante dos inúmeros desafios no ensino de matemática, os jogos podem ser uma alternativa para melhoria no processo de aprendizagem. Neste contexto, o objetivo é desenvolver um jogo para o reconhecimento de figuras geométricas de maneira não expositiva, tendo como alvo aprender matemática e manter a atenção dos alunos por meio da diversão.

Assim, no início do texto, buscamos responder à pergunta: *como elaborar um jogo para o ensino da matemática no reconhecimento de figuras geométricas?* Para isso, descrevemos o que é design de games e como ele é importante no desenvolvimento de um jogo. Na sequência, apresentamos a Unity, uma Game Engine responsável pela programação de jogos. Por fim, mostramos um dos scripts criados ao longo do projeto.

Destacamos que é de suma importância analisar as plataformas mais adequadas para lançar o jogo. No caso do *MathVania* foram escolhidas as plataformas móveis, *Android* e IOS, uma vez que a *Gameplay* do jogo pode "encaixar bem" é são os locais onde estão a maior parte do público alvo, alunos do Ensino Fundamental.

Além disso, o design de games ajuda a desenvolver o jogo de forma a equilibrar a diversão com a aprendizagem. Esse equilíbrio permite que os alunos aprendam de maneira mais intuitiva e espontânea ao jogarem.

Por fim, acrescentamos que o desenvolvimento de um jogo, utilizando uma Engine robusta como a Unity, é um desafio. Entretanto, com a utilização de tutoriais e experimentações, a Unity tem permitido desenvolver o jogo *MathVania* de forma quase profissional. Salientamos ainda que, dentre os próximos passos, estão a finalização da primeira fase, aplicação do jogo com alguns alunos e, a partir dos resultados, melhorar o jogo.

6 Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base. Acesso em: 31 mar. 2023.

ELIAS, Ana Paula de Andrade Janz; ZOPPO, Beatriz Maria; KALINKE, Marco Aurélio. Práticas Pedagógicas Alternativas no Currículo dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Cadernos do Aplicação**, Porto Alegre, v. 32, n. 2, p. 13-25, ago. dez. 2019. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/index.php/CadernosdoAplicacao/article/view/97608. Acesso em: 24 mar. 2023.

MATTAR, João. **Games em educação:** como os nativos digitais aprendem. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. 181 p.

PRENSKY, Marc. **Aprendizagem baseada em jogos digitais.** São Paulo: Editora Senac São Paulo. 2012. Tradução de Eric Yamagute. 575 p.

ROGERS, Scott. **Level Up! um guia para o design de grandes jogos.** São Paulo: Blucher, 2013. 575 p.

X Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
O Ensino da Matemática e as mudanças curriculares na Educação Básica

Toledo, 02 a 05 de maio de 2023.

USO DE VETORES PARA PROGRAMAÇÃO DO COMPORTAMENTO GRAVITACIONAL EM CORPOS SOB SUPERFÍCIE CILÍNDRICA

Guilherme Massahiro Takemori
Colégio Estadual Presidente Castelo Branco
senhor32@outlook.com.br

Renato Francisco Merli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
renatomerli@utfpr.edu.br

Resumo

O presente artigo tem por objetivo descrever, dentro do contexto de uma iniciação científica no Ensino Médio (PIBIC - EM), a experiência do primeiro autor no processo de programação do comportamento gravitacional sob uma superfície cilíndrica na Unity, uma *Game Engine*. Para isso, inicialmente são descritos os conceitos do cálculo vetorial que serão essenciais no desenvolvimento do *script*. Na sequência é realizada uma breve discussão sobre a *Game Engine* Unity. Por fim, são apresentados a problemática para criação do comportamento gravitacional e a produção do *script*. Como resultado, é possível inferir que a utilização de um *script* dessa natureza é essencial na produção de jogos que simulam um ambiente real. Além disso, foi possível verificar a importância do cálculo vetorial na constituição de modelos matemáticos que simulam a gravidade.

Palavras-chave: Vetores. Gravidade. Cilindro. UNITY. Jogos pedagógicos.

1 Introdução

O desenvolvimento de jogos tem crescido ao longo dos últimos anos por conta da inserção dos jogos nas mais diferentes áreas, como por exemplo, na educação. Dentre os meios de criação de jogos, temos diferentes motores de jogo, os quais organizam relações entre os objetos dentro dos jogos (gameobjects e objetos pré-estabelecidos). O motor de jogo utilizado foi o Unity.

A criação de jogos no Unity envolve a criação de um projeto, com a programação de *scripts* em C# e uma interface usada para a organização dos *gameobjects* do Unity, com abas como: “Hierarquia”, usada para listar os diferentes *gameobjects* por ordem de prioridade, esta, podendo ser utilizada em outras funções; “Projeto”, usada para ver os arquivos utilizados no projeto; “Console”, usada para visualizar os *outputs* da execução dos *scripts*; “Inspetor” usada para ver informações, componentes e configurações referentes aos *gameobjects*; “Jogo”, usada para visualizar a execução do projeto.

Uma vez que a gravidade padrão no Unity funciona apenas na direção do eixo y, deve-se valer de outros meios para emular um efeito gravitacional que atue em direção a uma linha que atravessa um cilindro circular reto (mundo) do centro de sua base inferior, até o centro de sua base superior.

Na próxima seção será discutido um meio de resolver esse problema.

2 Cálculo Vetorial

Segundo Resnick e Halliday (1983, p. 15), “Os vetores são grandezas que, para serem caracterizadas, exigem a especificação de um módulo, uma direção e um sentido e que se combinam segundo certas regras de adição”. Vetores podem ser descritos matematicamente pela decomposição desses vetores em seus componentes, postos em forma de matrizes, ou em forma da adição de vetores unitários (isto é, de módulo de valor 1) multiplicados por estes componentes. Vetores são usados para descrição teórica de fenômenos físicos e geométricos.

Consideremos um vetor posição A, correspondente a posição de uma entidade sob a superfície desse cilindro, com um vetor B de tamanho 1, ortogonal ao vetor A (nisso, segundo Lipschutz e Lipson (2009), o produto escalar entre A e B deve ser 0), sob uma secção deste cilindro por um plano yz. Sobre essas especificações, as seguintes equações são válidas:

$$A \cdot B = 0$$

$$|B| = 1$$

$$A_y B_y + A_z B_z = 0 \qquad (1)$$

$$B_y^2 + B_z^2 = 1 \qquad (2)$$

A partir de (2), é possível inferir que:

$$B_y = \sqrt{1 - B_z^2} \qquad (3)$$

De (1) e (3), temos:

$$A_y \sqrt{1 - B_z^2} + A_z B_z = 0 \qquad (4)$$

Isolando B_z em (4), obtemos:

$$A_y \sqrt{1 - B_z^2} = -A_z B_z$$

$$\sqrt{1 - B_z^2} = -\frac{A_z}{A_y} B_z$$

$$1 - B_z^2 = (\frac{A_z}{A_y})^2 B_z^2$$

$$\frac{1}{B_z^2} - 1 = (\frac{A_z}{A_y})^2$$

$$\frac{1}{B_z^2} = 1 + (\frac{A_z}{A_y})^2$$

$$B_z^2 = \frac{1}{1 + (\frac{A_z}{A_y})^2}$$

$$B_z = \pm \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{A_z}{A_y})^2}} \qquad (5)$$

Utilizando (2) e (5), é possível chegar na equação seguinte:

$$B_y^2 + \frac{1}{1+(\frac{A_z}{A_y})^2} = 1 \qquad (6)$$

Isolando B_y em (6), temos:

$$B_y = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{1+(\frac{A_z}{A_y})^2}} \qquad (7)$$

O próximo passo é determinar o sinal de ambos.

Para se ter o vetor B apontando para frente, isto é, na direção positiva de z, quando $A_z = 0$, e permanecendo nessa configuração, B_z e B_y devem ter seus sinais, em cada quadrante, respectivamente:

Ⅰ: + e -

Ⅱ: + e +

Ⅲ: - e +

Ⅳ: - e -

O que pode ser inferido, analisando vetores específicos em cada quadrante. (Fig. 1)

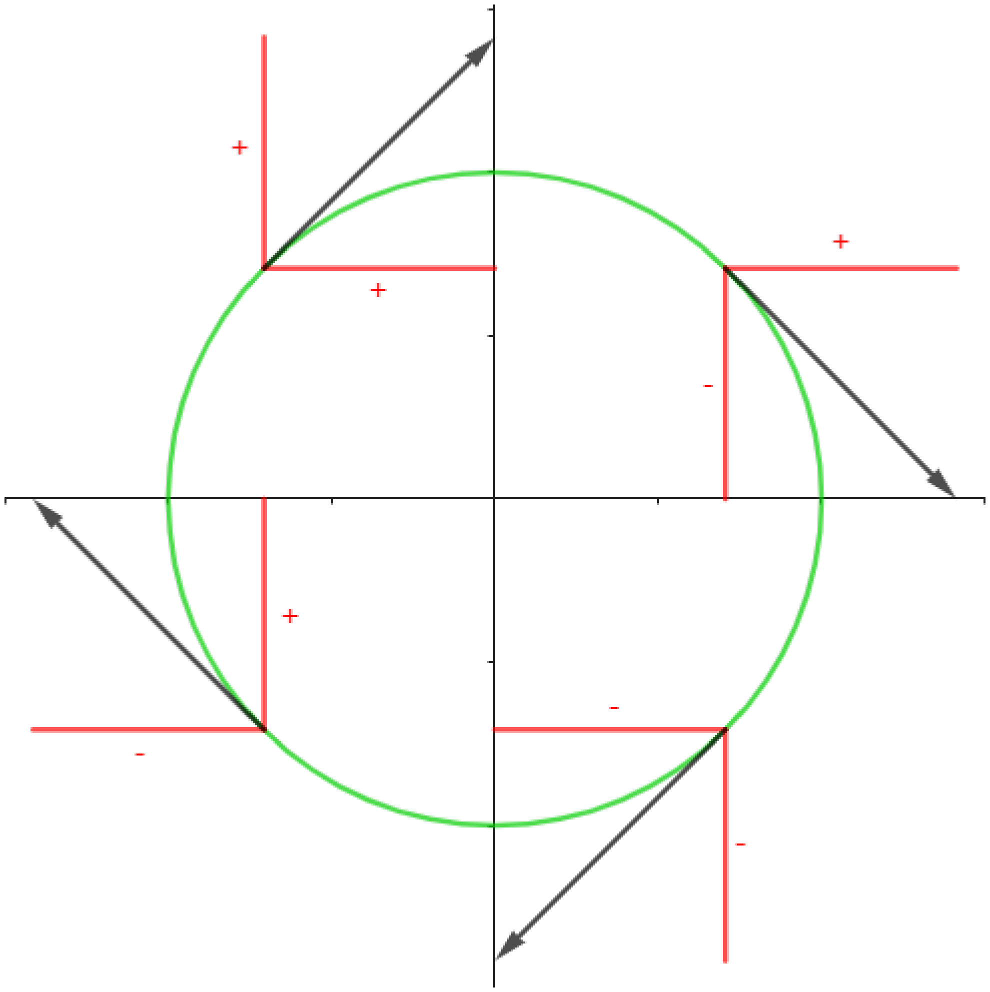


Figura 1 – Vetores exemplo em cada quadrante.
Fonte: Autores, 2023.

Observa-se que, B_z é positivo quando está nos quadrantes Ⅰ ou Ⅱ, então, quando A_y é positivo ou negativo, B_z é equivalente. De mesmo modo, B_y é positivo quando está nos quadrantes Ⅱ e Ⅲ, logo, quando A_z é negativo ou positivo, B_y tem sinal inverso ao de A_z. Assim, concluímos que:

$$B_z = sgn(A_y)\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{A_z}{A_y})^2}} \quad (8)$$

$$B_y = -sgn(A_z)\sqrt{1-\frac{1}{1+(\frac{A_z}{A_y})^2}} \quad (9)$$

Sendo: $sgn(x) \equiv \frac{x}{|x|}\ ou\ \frac{|x|}{x}$

Essas equações permitem calcular a aplicação de forças sob objetos em cima do mundo cilíndrico, estes estando também, sob a restrição de uma órbita circular.

Uma vez apresentadas as equações que regem o comportamento gravitacional de um corpo, na próxima seção são discutidas algumas ferramentas da Unity.

3 Unity

Unity é uma *Game Engine*, multiplataforma, desenvolvido pela Unity Technologies. Ela é usada para criar jogos, servindo como uma estrutura que liga os diferentes objetos do jogo. Foi lançada em 2005, com o objetivo de “democratizar” o desenvolvimento de jogos. A Unity foi lançada inicialmente para Mac OS X, posteriormente foi adicionado o suporte para Microsoft Windows e navegadores da Web. (WIKIPEDIA, 2023)

Com vistas a produção de um jogo pedagógico voltado para o ensino de matemática, o problema inicial foi desenvolver o comportamento gravitacional de uma bola maciça homogênea que rola em um corredor infinito. O tipo de jogo em que isso acontece é conhecido como *Endless Run* ou Corrida Infinita. (Fig. 2)

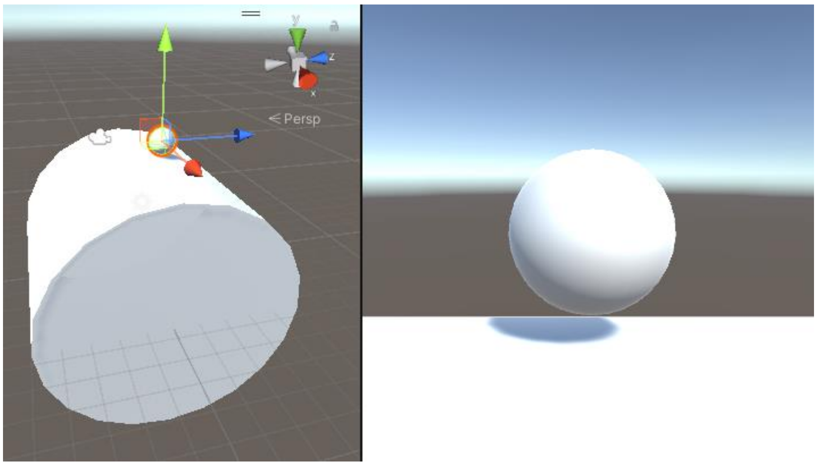


Figura 2 – Mecânica e gameplay do jogo no Unity.
Fonte: Autores, 2023.

Nesse tipo de jogo, o comportamento gravitacional é essencial, já que ele permite uma mimetização do mundo real, com a gravidade sendo um dos principais componentes. Nesse sentido, a Unity oferece uma ferramenta que permite realizar essa modelagem, uma configuração do componente *RigidBody*, “use gravity”, o qual faz o objeto em questão acelerar para baixo (sentido contrário ao eixo y).

Na próxima seção, é descrita a experiência no desenvolvimento do *script* da Unity capaz de simular o comportamento gravitacional de um corpo numa superfície cilíndrica.

4 Relato da experiência

O objetivo final da iniciação científica é criar um jogo pedagógico voltado para o ensino de matemática. Para isso, foi pensado num jogo do tipo *Endless Run*, no qual, o jogador principal é uma bola (Fig. 3), que rola indeterminadamente pra frente, e para os lados, dependendo das teclas pressionadas pelo usuário (A ou D), junto de opções de escolha apresentadas ao jogador (apenas uma correta). Dentro dessa mecânica, o *gameplay* utiliza uma penalização em caso de erro e/ou compensação em caso de acerto, sobre temas envolvidos no ensino da matemática.

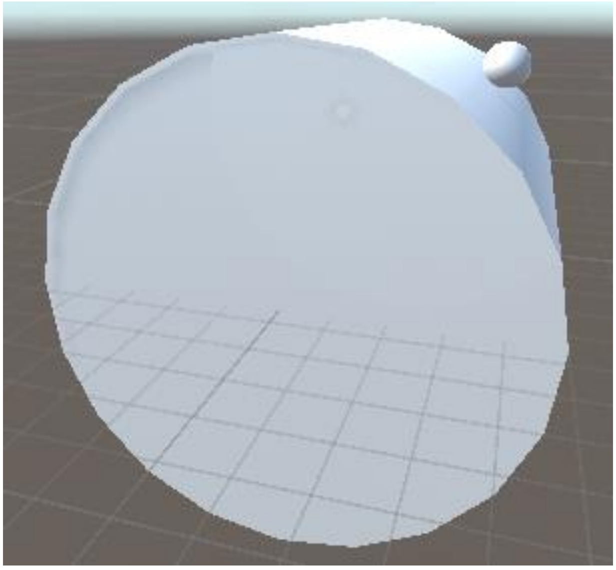


Figura 3 – Bola rolando sobre o cilindro.
Fonte: Autores, 2023

Dentre os diversos desafios encontrados, a proposta original de criar plataformas que aparecem no horizonte da visão do jogador parecem criar jogos que não são naturais, ou melhor, que não simulam de modo adequado a realidade.

Uma saída para resolver esse problema seria criar colunas de neblina. Entretanto, isso poderia atrapalhar a jogabilidade do jogador, já que, ele consegue perceber que algo foi programado para ser ocultado de sua visão.

A melhor solução, dentro deste contexto, foi criar um mundo em formato cilíndrico, com o jogador avançando em sua superfície. (Fig. 4)

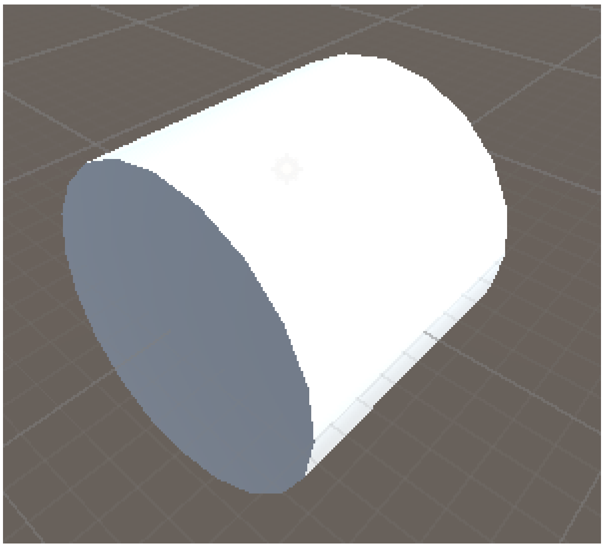


Figura 4 – Mundo cilíndrico.
Fonte: Autores, 2023

Dessa forma, o código gerado para o jogador foi:

```
using System.Collections;
using System.Collections.Generic;
using UnityEngine;

public class player2 : MonoBehaviour
{
    public GameObject mundo;
    public float multiplicadorDeForca = 0.6f;
    public float forcaDeAtrito = 0.2f;
    public float forcaPraFrente = 2f;
    public float velocidadeLimite = 3f;
    // Start is called before the first frame update
    void Start()
    {

    }

    // Update is called once per frame
    void Update()
    {
        var p = GetComponent<Rigidbody>();
        var m = p.mass;

        var vetorfy = -Mathf.Sign(transform.position.z) * Mathf.Sqrt(1 - 1 / (1 +
Mathf.Pow(transform.position.z / transform.position.y, 2)));
        var vetorfz = Mathf.Sign(transform.position.y) / Mathf.Sqrt(1 +
Mathf.Pow(transform.position.z / transform.position.y, 2));

        var vtang2 = Mathf.Pow(p.velocity.y, 2) + Mathf.Pow(p.velocity.z, 2);

        if (vtang2 < Mathf.Pow(velocidadeLimite, 2))
        {
            p.AddForce(new Vector3(0, vetorfy, vetorfz) * forcaPraFrente);
        }
```

```
        var ent = Input.GetAxis("Horizontal");
        Vector3 dirMov = new Vector3(-p.velocity.x, 0, 0).normalized;
        p.AddForce(Vector3.right * ent * multiplicadorDeForca);

        if (Mathf.Abs(p.velocity.x) > 0)
        {
            p.AddForce(dirMov * forcaDeAtrito * m);
        }

        Vector3 center = new Vector3(0f, transform.position.y, transform.position.z);
        Vector3 centern = -center.normalized;
        p.AddForce(centern * m * vtang2 / (mundo.transform.lossyScale.x +
transform.lossyScale.x));
    }
}
```

E, para a câmera, o código é:

```
using System.Collections;
using System.Collections.Generic;
using UnityEngine;

public class camera : MonoBehaviour
{
    public GameObject player;
    public float distanciaRelativa = 2.5f;
    // Start is called before the first frame update
    void Start()
    {
        var vetorty = Mathf.Sign(player.transform.position.z) * Mathf.Sqrt(1 - 1 / (1 +
Mathf.Pow(player.transform.position.z / player.transform.position.y, 2)));
        var vetortz = -Mathf.Sign(player.transform.position.y) * Mathf.Sqrt(1 / (1 +
Mathf.Pow(player.transform.position.z / player.transform.position.y, 2)));

        transform.position = new Vector3(0, vetorty, vetortz) * distanciaRelativa +
player.transform.position;
    }

    // Update is called once per frame
    void Update()
    {
       var vetorty = Mathf.Sign(player.transform.position.z) * Mathf.Sqrt(1 - 1 / (1 +
Mathf.Pow(player.transform.position.z / player.transform.position.y, 2)));
       var vetortz = -Mathf.Sign(player.transform.position.y) * Mathf.Sqrt(1 / (1 +
Mathf.Pow(player.transform.position.z / player.transform.position.y, 2)));

       transform.position = new Vector3(0, vetorty, vetortz) * distanciaRelativa +
player.transform.position;
            transform.rotation = Quaternion.Euler(Mathf.Rad2Deg *
Mathf.Atan(player.transform.position.z / player.transform.position.y) + 90 * (1 -
Mathf.Sign(player.transform.position.y)), 0, 0);
    }
}
```

Ambos os códigos, do jogador e da câmera, envolvem a implementação das equações finais descritas na seção 2. No código do jogador, as equações servem para calcular as forças de movimento para frente, sob a superfície do cilindro. Já no código da câmera, elas servem para calcular a posição da mesma.

5 Conclusões

No início do texto, mostramos que o objetivo do artigo era apresentar a experiência do primeiro autor em emular o comportamento gravitacional sob superfícies cilíndricas. Para isso, foram apresentados os conceitos matemáticos necessários para tal comportamento.

Na sequência, comprovamos que a resolução desse problema (de emular) se deu por meio da criação de restrições circulares do movimento dos objetos. Disso, podemos inferir que esse modelo é eficaz, uma vez que aprimora a jogabilidade e conforto do jogador.

Destacamos que outras soluções para o problema, como a aplicação direta da força gravitacional, ou a aplicação de força centrípeta correspondente, sem utilizar as restrições de movimento em círculo implícitas no código do jogador, resultaram no jogador saindo do mundo, ou flutuando sobre a superfície.

Esse resultado se deve às especificidades da função “AddForce” na Unity. Apesar disso, ainda há alguns comportamentos não naturais, como o jogador atravessando parcialmente a superfície do mundo, provavelmente causado pela mesma função, já que ela continua sendo usada como fonte do movimento.

Por fim, podemos considerar que esse modelo poderá ser utilizado em outros jogos pedagógicos que possuem um mundo cilíndrico tridimensional, ou circular bidimensional, como meio de cálculo de forças relativas e posição da câmera.

Referências

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. **Álgebra Linear Coleção Schaum**. 4 ed. São Paulo: BOOKMAN® COMPANHIA EDITORA, 2011.

RESNICK, R. HALLIDAY, D. **Física 1**. Tradução de: LUZ, A. M. R. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1983. Título original: Physics.

Unity (game engine). In: Wikipedia: the free encyclopedia. [São Francisco, CA: Wikimedia Foundation], 2023. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Unity_(game_engine). Acesso em: 30 mar. 2023.